演算子積分時間領域境界要素法を用いた球状空洞に対する3次元粘弾性波動散乱解析

群馬大学　大学院理工学府　学生会員　○竹田　晴彦
群馬大学　大学院理工学府　正会員　斎藤　隆泰

1. はじめに

粘弾性波動問題では, 波動が分散性を示すことから, 時間領域境界要素解析に必要な時間域での基本解が閉じた形で求まらないことが問題であった. しかし, 時間方向の離散化に対し演算子積分法を用いることで, それらの問題を解決した新たな時間領域境界要素法 (演算子積分時間領域境界要素法) が提案された. その手法は, これまで 2 次元粘弾性面外 [1]・面内 [2] 波動問題に適用されてきたが, 3 次元外部粘弾性波動解析はこれまでほとんど行われていないのが現状である. そこで, 本研究では, 3 次元粘弾性波動問題に対する演算子積分時間領域境界要素法の定式化を行う. 後に, 球状空洞による粘弾性波動の散乱解析結果を示すことで, 本手法の有効性を確認する.

2. 3次元粘弾性波動問題に対する演算子積分時間領域境界要素法の定式化

今, 図 1 で表されるような線形粘弾性波動問題の 3 次元領域 D 内における $\bar{D}$ による散乱問題を考える. 入射波 u_i^{in} は, 散乱体 $\bar{D}$ の境界表面 S により反射・散乱されるとする. このとき入射波が散乱体 $\bar{D}$ に到達するまで静かな過去を持つとする. すなわち, 初期条件 $u_i(\boldsymbol{x}, t=0)=0$ および $\partial u_i(\boldsymbol{x}, t=0)/\partial t = 0$ を考慮すれば, 変位 u_i および表面力 t_i に関して, 支配方程式および境界条件は次のように表される.

$$\begin{aligned}&\mu(t) * \dot{u}_{i,jj}(\boldsymbol{x},t) + \left(K(t)+\frac{1}{3}\mu(t)\right) * \dot{u}_{j,ij}(\boldsymbol{x},t)\\ =&\rho\ddot{u}_i(\boldsymbol{x},t) \quad \text{in } D \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}&u_i = \bar{u}_i \quad \text{on} \quad S_1, \quad t_i = \bar{t}_i \quad \text{on} \quad S_2,\\ &S_2 = S \setminus S_1\end{aligned} \tag{2}$$

ただし, ρ は密度, $\mu(t), K(t)$ はそれぞれ, せん断弾性係数, 体積弾性係数に対する緩和関数を表し, 不遡及の公理 $\mu(t)=0, -\infty < t < 0$ を満足するものとする. また, $*$ は畳込み積分を表し, $\dot{(\ )}$ および $(\ )_{,i}$ はそれぞれ, 時間および空間に関する微分 $\partial/\partial t, \partial/\partial x_i$ を表す. さらに, $\bar{u}_i$ および $\bar{t}_i$ は与えられた境界条件である.

ここで, 一般に線形粘弾性波動問題に対しては解析的に閉じた基本解を得られないが, 仮に基本解が与えられるとすると, 式 (1), (2) により定義された初期値・境界値問題の解は, 次の時間領域境界積分方程式を解くことにより求まる.

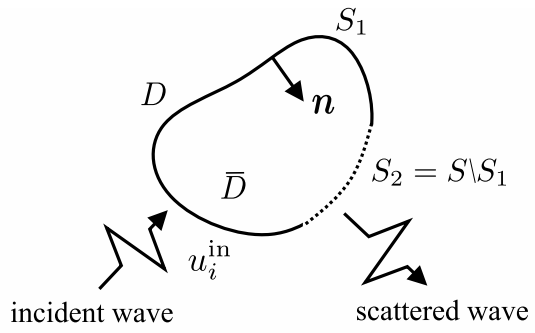

図 1 解くべき問題.

$$\begin{aligned}C_{ij}(\boldsymbol{x})u_j(\boldsymbol{x},t) =& u_i^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x},t) + \int_S U_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) * t_j(\boldsymbol{y},t) dS_y\\ &- \int_S T_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) * u_j(\boldsymbol{y},t) dS_y\end{aligned} \tag{3}$$

ただし, 式 (3) において, C_{ij} は自由項であり, $U_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$ および $T_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$ は 3 次元粘弾性波動問題における時間領域基本解および対応する二重層核である.

次に, 境界積分方程式 (3) に対し, 演算子積分法を適用する. 式 (3) を M 個の一定要素で離散化し, 滑らかな境界 S に対して $\boldsymbol{x} \in D \to \boldsymbol{x} \in S$ なる極限移行を考慮すれば, 時間増分 Δt に対して, 次の第 n ステップにおける離散化された時間領域境界積分方程式を得ることができる.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}u_i(\boldsymbol{x}, n\Delta t) = u_i^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x}, n\Delta t)\\ &+\sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{k=1}^{n}[A_{ij}^{n-k}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}^\alpha)t_j^\alpha(k\Delta t) - B_{ij}^{n-k}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}^\alpha)u_j^\alpha(k\Delta t)]\end{aligned} \tag{4}$$

ただし, 式 (4) において, $\boldsymbol{y}^\alpha$ は α 番目の境界要素代表点を表し, $u_j^\alpha(k\Delta t), t_j^\alpha(k\Delta t)$ は, それぞれ第 k ステップにおける $\boldsymbol{y}^\alpha$ での変位および表面力成分を表す. また, A_{ij}^m, B_{ij}^m は影響関数であり, 演算子積分法のパラメータ $\mathcal{R}, L, \delta(z_l)$ を用いて, それぞれ次のように表すことができる.

$$A_{ij}^m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{\mathcal{R}^{-m}}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\int_S \hat{U}_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},s_l)e^{-\frac{2\pi iml}{L}}dS_y \tag{5}$$

$$B_{ij}^m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{\mathcal{R}^{-m}}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\int_S \hat{T}_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},s_l)e^{-\frac{2\pi iml}{L}}dS_y \tag{6}$$

ただし, s_l は $s_l = \delta(z_l)/\Delta t$ で定義され, その $\delta(z_l)$ は線形マルチステップ法 (差分法) における生成多項式の商である. また, $\mathcal{R}, L$ は目標とする精度 ϵ との関係 $\mathcal{R}^L = \sqrt{\epsilon}$ により

Key Words: 時間領域境界要素法, 演算子積分法, 粘弾性波動
〒 376-8515　群馬県桐生市天神町 1-5-1

© Japan Society of Civil Engineers

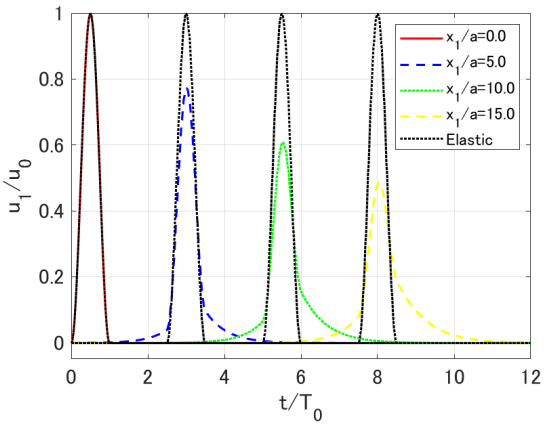

図 2 粘弾性体用に修正した平面波の時刻歴波形.

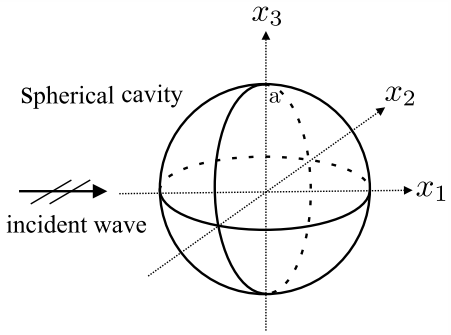

図 3 散乱解析モデル.

決定するパラメータである. $\hat{U}_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},s)$ および $\hat{T}_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},s)$ は 3 次元粘弾性波動問題におけるラプラス変換域での基本解および対応する二重層核である.

今, ラプラス変換域においては, 3 次元粘弾性波動問題における基本解は解析的に閉じた形で求めることができるため, 式 (4) において, 第 n ステップ以前の境界値 u_i, t_i が全て求まっていれば, 第 n ステップにおける境界未知量を逐次的に計算することができる.

3. 粘弾性モデルと解析に用いる入射波

解析例を示す前に, 本解析で用いる粘弾性モデルについて示す. 本解析で用いる粘弾性モデルは三要素標準モデルであり, その複素せん断弾性係数は次のように表せる.

$$\mu^*(s) = \mu_R \frac{1+s\tau_\sigma}{1+s\tau_\epsilon} \tag{7}$$

ただし, τ_σ および τ_ϵ はそれぞれ応力緩和時間, ひずみ緩和時間であり, μ_R は緩和せん断弾性係数である. なお, 本解析ではせん断弾性係数のみに粘弾性効果を考慮した. また, 粘弾性のパラメータとして緩和せん断弾性係数と初期せん断弾性係数の比を $\mu_R/\mu_0 = 0.85$, 体積弾性係数と初期せん断弾性係数の比を $K/\mu_0 = 5/3$, 初期弾性縦波速度 c_{L0} の波が 1 つの球状空洞を通過する時間を $T_0 = 2a/c_{L0}$, $\tau_\sigma = 0.5T_0$, $\tau_\epsilon = 17T_0/40$ とした. さて, 本解析で用いる入射波は, 平面縦波を粘弾性体用に修正したものを用いる. Fourier 変換を

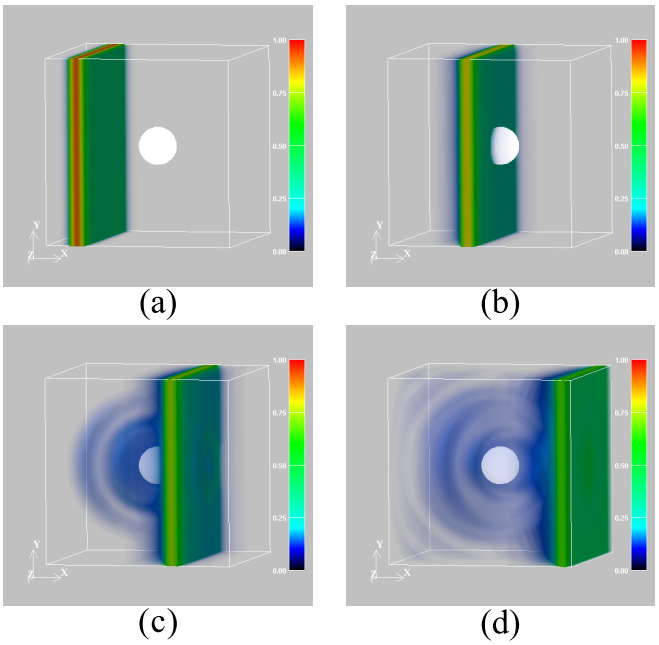

図 4 粘弾性体中の球状空洞に対する散乱波動解析結果. **(a)** $t/T_0 = 1.48$ **, (b)** $t/T_0 = 2.96$ **, (c)** $t/T_0 = 4.40$ **, (d)** $t/T_0 = 5.88$

$\mathcal{F}$ とすると, 入射波は次式で与えられる [2].

$$u_i^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x},t) = u_0\delta_{i1}\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\omega_0^2(1-e^{i\omega T_0})}{2i\omega(\omega^2-\omega_0^2)}e^{ik_L x_1}\right] \tag{8}$$

ここで, u_0 は変位振幅, $\omega_0 = 2\pi/T_0$ で与えられる. また, ω は角周波数, k_L は縦波の波数である. 図 2 には, 粘弾性体および弾性体の入射波の時刻歴波形を示している. 粘弾性体用に修正された入射波は, 時間とともに減衰していることが確認できる.

4. 数値解析例

解析モデルの一例を図 3 に示す. 図 3 に示すような半径 a の球状空洞に対する 3 次元粘弾性波動の散乱問題を考える. 球状空洞は四角形要素, 384 分割に離散化し, 総ステップ数 $N = L = 256$, $\epsilon = 10^{-10}$ を想定し, 時間増分を $c_{L0}\Delta t/a = 0.08$ として計算した. 図 4 (a) - (d) に, 全変位場の時刻歴を示す. なお, 図中の白抜きの部分は球状空洞を表していることに注意されたい. 時間の経過につれ, 弾性波の減衰が生じ, 粘弾性の効果が表れていることが確認できる.

5. まとめと今後の課題

本論文では, 演算子時間領域境界要素法を用いて, 時間領域の基本解を閉じた形で求めることができない 3 次元外部粘弾性波動解析における定式化を行った. 球状空洞に対する散乱解析を行い, 妥当性を示した. 今後は, さらに異方性の影響を考慮すること, 高速多重極法を適用することで, 計算効率を向上させることを行う予定である.

参考文献

1) 斎藤隆泰・石田貴之・福井卓雄・廣瀬壮一：粘弾性面外波動問題における演算子積分時間領域境界要素法および高速多重極法の適用, 計算工学論文集, 論文番号 No.20080011, 2008
2) 斎藤隆泰・福井卓雄・廣瀬壮一・石田貴之：粘弾性面内波動問題における演算子積分時間領域境界要素法および高速多重極法の適用, 計算工学論文集, 論文番号 No.20080021, 2008

© Japan Society of Civil Engineers