

NURBS ソリッド要素を用いた曲がりばりのアイソジオメトリック解析

日本大学 学生員 ○唐澤 奈央子

日本大学 正会員 長谷部 寛

1. はじめに

橋梁などの土木構造物の設計において、詳細な検討には有限要素解析が用いられる。構造物や構造部材をはり要素やシェル要素で要素分割することもあるが、ソリッド要素が用いられることも多い。一方で、解析メッシュを生成するプロセスは、CAD で描いた形状データをメッシュ生成ソフトに渡してメッシュ生成することが一般的であり、その過程で形状誤差が生じることもある。

土木分野以外でも、CAD と有限要素メッシュ生成の間には上記の課題があるが、これらの課題を解決する解析手法として Hughes らによりアイソジオメトリック解析が提案された¹⁾。アイソジオメトリック解析の特徴の一つは、CAD の形状表現に用いられる NURBS を有限要素の基底関数に用いることであり、その結果、厳密な形状表現が可能になる。しかし、NURBS ソリッド要素が、橋梁の構造解析に用いられた事例は数少なく、橋梁の主要部材である“はり”を NURBS ソリッド要素で要素分割した際の解析精度を把握することは有益である。

本研究では、橋梁の構造設計へのアイソジオメトリック解析の導入を目指し、アーチ橋のような曲線で描かれた部材（曲がりばり）の解析を対象に、NURBS ソリッド要素の性能を検討した。

2. NURBS 曲線と基底関数

NURBS 曲線 $C(\xi)$ は、実空間上に配置されるコントロールポイントの座標値により構成される位置ベクトル $\mathbf{B}_i$ と、NURBS 基底関数 $R_i^p(\xi)$ の線形結合として、次式で表される。

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n R_i^p(\xi) \mathbf{B}_i \quad (1)$$

$$R_i^p(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi) w_i}{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) w_i} \quad (2)$$

ここで、 $N_{i,p}(\xi)$ は B-Splines 基底関数、 w_i は形状を制御

するためのコントロールポイントにおける重み、 p は基底関数の次数、 n はコントロールポイント数である。また、B-Splines 基底関数 $N_{i,p}(\xi)$ は次式で表される再帰的な関数である。

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & (\text{if } \xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1}) \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3a)$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (3b)$$

ξ_i はノットと呼ばれるパラメータであり、曲線上の要素の境界を表す局所座標値である。

3. 曲がり梁の解析

3. 1 支配方程式と解析条件

支配方程式には以下の線形弾性体の平衡方程式を採用し、弱形式化した後、Galerkin 法に基づく有限要素法で離散化した。

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad (4a)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{ij}, \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (4b)$$

ここで σ_{ij} は応力テンソル、 f_i は物体力、 ϵ_{ij} はひずみテンソル、 u_i は変位ベクトル、 C_{ijkl} は弾性テンソルである。境界条件には変位規定の条件 $u_i = \bar{u}_i$ と表面力 $h_i = \sigma_{ij} n_j$ を規定する条件を用いた。変位および重み関数の基底関数には NURBS を採用した。

解析モデルと境界条件を図-1 に示す。 ξ , η , ζ はパラメータ空間の座標であり、それぞれ ξ が実空間におけるはりの軸方向、 η が軸直交方向、 ζ が奥行き方向に相当する。ヤング率は $E = 2.1 \times 10^{11}$ Pa、ポアソン比は $\nu = 0.3$ とした。用いた解析メッシュは ξ 方向 : η 方向 : ζ 方向 = 2 : 1 : 1 の比率を保つように、 ξ 方向 2, 4, 8, 16 要素の 4 ケースを CAD で作成し、それぞれ 2 次と 3 次の NURBS 基底関数で解析を行った。一例として、基底関数 2 次、 ξ 方向 8 要素のメッシュと鉛直変位の分布を図-2 (a), (b) に示

キーワード : アイソジオメトリック解析, NURBS 基底関数, ガウス積分, 曲がりばり

連絡先 : 〒101-8308 東京都千代田区神田駿河台 1-8-14

す. 少ない要素数でも滑らかな変位の分布が得られた.

3. 2 ガウス積分点の検討

NURBS 基底関数の要素積分には数値積分が用いられる. 本研究ではガウス積分を用いたが, NURBS は非一様の有理多項式であるため, 必要な積分点数を検討した. そこで, ξ 方向 2 要素と 16 要素の 2 パターンのメッシュを用いて, 積分点の数を 2~8 まで変えて, 自由端鉛直変位の値の変化を見た. その結果を表-1 に示す.

実際は倍精度計算であるが, 表-1 には有効桁 7 桁までの値を示した. 有効桁 7 桁の範囲では, NURBS 基底関数の次数による差異は見られなかった. 2 要素の場合, 6 点以上で値が収束した. 一方, 16 要素の場合, 4 点以上で収束した. これは, 2 要素よりも 16 要素の方が, 解析モデルの形状を制御するコントロールポイントの数が多く, 重みの値が 1 に近づく (B-Splines 基底関数に近づく) ためと考えられる. 以上の結果から, 次節の検討では積分点数を 6 点とした.

3. 3 自由端鉛直変位の理論解との比較

自由端鉛直変位の解析結果を理論解と比較した. 理論解はせん断変形を考慮するティモシェンコはり理論に基づいて算出した. 理論解との相対変位を図-3 に示す. NURBS の次数によらず, 少ない要素数で理論解に漸近する結果となった. 3 次の NURBS を用いた場合, ξ 方向 4 要素で理論解に対して 98%の値となり. 2 次の NURBS では, 4 要素の場合が 78%, 8 要素の場合が 98%となった. 3 次の NURBS では, 2 次の NURBS に対して半分の要素数で同程度の精度が得られた.

4. まとめ

本研究では, 曲がりばりを対象としたアイソジオメトリック解析において, ガウス積分点数と解析精度の検討を行った. その結果, NURBS 要素に対する積分点数は通常の多項式に対する積分点数よりも多く必要であること, 自由端鉛直変位に着目した結果, 同程度の精度を得るためには 3 次の NURBS は 2 次の NURBS の半分の要素数で済むことが分かった.

参考文献

1) J. A. Cottrell, T. J. R. Hughes, Y. Bazilevs : Isogeometric Analysis -Toward Integration of CAD and FEA-, Wiley, 2009.

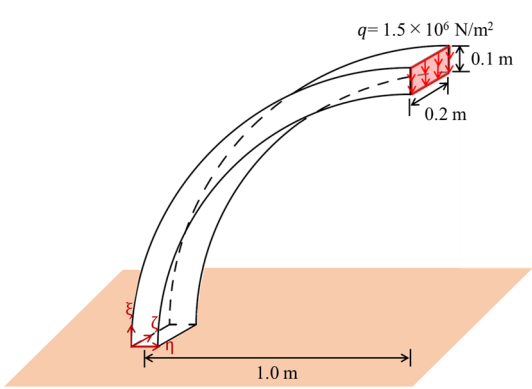
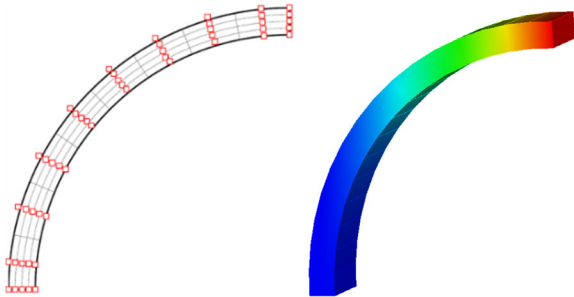


図-1 解析モデルと境界条件



(a) 解析メッシュ (b) 鉛直変位分布

図-2 2 次, ξ 方向 8 要素のメッシュと鉛直変位分布

表-1 積分点数と自由端鉛直変位の関係

積分 点数	自由端鉛直変位 [$\times 10^{-3}$ m]			
	2要素		16要素	
	2次	3次	2次	3次
2			6.687099	6.704823
3	1.359276	6.173085	6.677817	6.693170
4	1.377276	6.053916	6.677818	6.692919
5	1.377097	6.055600	6.677818	6.692919
6	1.377098	6.055581	6.677818	6.692919
7	1.377098	6.055581	6.677818	6.692919
8	1.377098	6.055581	6.677818	6.692919

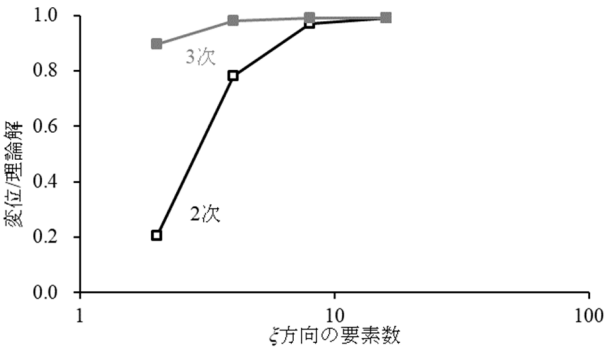


図-3 自由端鉛直変位の理論解との比較