IGAによるポテンシャル流れ解析

中央大学大学院　学生員　○ 吉田　也真都
中央大学　正会員　樫山　和男
日本大学　正会員　長谷部　寛

1. はじめに

土木分野において，流体-構造連成解析に関する研究は盛んに行われており，その解析手法の一つとしてCAD で描かれた構造物の曲線形状を完全に表現できるIGA[1)2)] (Isogeometric Analysis) が近年注目されている．

そこで，本研究ではIGA の基礎研究として，CAD で曲線や曲面の表現に用いられるNURBS 関数を用いたIGAと従来の有限要素法 (FEM) との解析手順の違いを示し，二次元ポテンシャル流れ問題へIGA の適用を行った．

2. 数値解析手法

(1) NURBS

形状関数に用いるNURBS 関数について述べる前にNURBS 関数の基本となるB-Spline 基底関数について述べる．B-Spline 基底関数は式 (1) より決定される．

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{上記以外} \end{cases} \quad (p=0)$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (p = 1,2,3,\cdots) \tag{1}$$

ここで，i は制御点の番号，p はB-Spline 基底関数の次数，ξ_i はパラメータ空間の座標であるノットを表す．ノットとはB-Spline 基底関数を決定するパラメータで，そのノットの並び，$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n+p+1}\}$ をノットベクトルという．このノットベクトルはCAD で描いた形状から得られる数列である．式 (1) を用いてIGA で解析領域を表現するNURBS 曲面，形状関数となるNURBS 基底関数は式 (2)，式 (3) のように表される．

$$\mathbf{S}(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} R_{i,j}^{p,q}(\xi,\eta)\mathbf{B}_{i,j} \tag{2}$$

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi,\eta) = \frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)w_{i,j}}{\sum_{\hat{i}=1}^{n}\sum_{\hat{j}=1}^{m} N_{\hat{i},p}(\xi)M_{\hat{j},q}(\eta)w_{\hat{i},\hat{j}}} \tag{3}$$

ここで，$\mathbf{B}_{i,j}$ は制御点，$w_{i,j}$ は各制御点の重みを表す．

(2) 有限要素法との違い

二次元ポテンシャル問題を例としてGalerkin 法に基づくFEM と比較してIGA の解析手法を記す．基本的に解析手順はFEM と同様で，支配方程式であるLaplace 方程式に対して重み付き残差法により弱形式を導き，各要素で形状関数を用いてポテンシャルと重み関数を補間し，係数行列を求め，連立一次方程式を解くことでポテンシャルを求めるのだが，その過程で異なる部分を表-1 に示す．

表-1 FEM と IGA の異なる点

	FEM	IGA
要素	メッシュ(低次の多角形)	ノットベクトルの区間
形状関数	多項式の基底関数	NURBS基底関数
自由度	節点が持つ	制御点が持つ

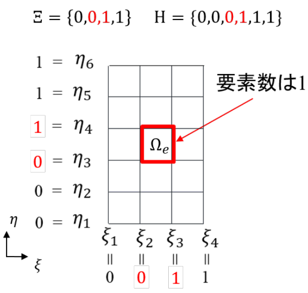


図-1 IGA における要素

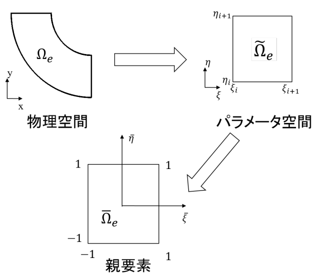


図-2 IGA における写像

a) IGA における要素

IGA においては，CAD データから得られるノットベクトルの非ゼロ区間によって要素が定義される．ここで非ゼロ区間というのは図-1 に示すようなノットの空間でみたとき，ノットの値が変化する部分のことである．

b) IGA における写像

IGA では形状関数であるNURBS 基底関数がノット (ξ,η) から決定される関数であるため，物理空間 $\Omega_e(x,y)$ からパラメータ空間 $\tilde{\Omega}_e(\xi,\eta)$ へ変数変換を行う必要がある．しかし，パラメータ空間での積分が複雑であるため，数値積分を行うためにパラメータ空間 $\tilde{\Omega}_e(\xi,\eta)$ から親要素 $\bar{\Omega}_e(\bar{\xi},\bar{\eta})$ へ変数変換を行い，親要素上で数値積分することで係数行列を求める．このようにIGA では変数変換を二回施す必要がある（図-2）．

c) 自由度を持つ点

IGA では自由度を制御点 $\mathbf{B}_i$ が持つことである．このために，結果の可視化の際にはひと手間加える必要がる．IGA では要素の速度ポテンシャルは式 (4) のように補間される．

$$\phi_e^h(\xi,\eta) = \sum_{I=1}^{n_{cp}} R_I(\xi,\eta)\phi_I \tag{4}$$

ここで，n_{cp} は制御点の数を，添え字 I は式 (3) における添え字 i,j をまとめて表している．可視化の際には，式 (4) の

KeyWords： IGA，NURBS，ポテンシャル流れ
連絡先：　〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27　TEL. 03-3817-1815　Email：a16.yhft@g.chuo-u.ac.jp

通り，各制御点において求まった速度ポテンシャルと各制御点の NURBS 基底関数をある ξ,η において求め，そのある ξ,η に相当する物理空間 (x 座標,y 座標) 上で速度ポテンシャルを可視化する必要がある．

3.　数値解析例

数値解析例として，二次元ポテンシャル流れ問題を取り上げる．

(1)　解析条件

解析領域は図-3 に示す四分の一円の解析領域で，境界条件として円の直線部分に Dirichlet 境界条件，曲線部分に Neumann 境界条件を定める．図-4 には図-3 に示した解析領域を ξ 方向 1 次，η 方向 2 次の NURBS 曲面で表現するためのノットベクトル，制御点，制御点にかかる重み，制御点を結んでできるコントロールネットを示す．図-4 に示すノットベクトルから，本解析では要素数が 1 となる．つまり，図-3 に示した解析領域そのものが本解析のメッシュとなる．そして制御点の数は 6 であり，係数行列の大きさは 6×6 となる．

本解析では比較対象として FEM で図-5 に示す粗いメッシュ (要素サイズ約 0.3, 要素数 51) と細かいメッシュ (要素サイズ約 0.1, 要素数 504) を用いて解析を行った．

(2)　解析結果

IGA の可視化にあたっては ξ,η をそれぞれ 100 分割して結果を出力した．その際の格子と IGA と FEM での解析結果を図-6 に示す．ここで注意されたいのは，図-6(a) で示している格子は解析に用いた格子ではなく，結果を出力するための格子である．一般的な可視化ソフトでは NURBS による補間ができないために，任意形状を表現するには何らかの工夫を施す必要がある．また，図-6(b)〜(c) を比較すると，IGA では要素数が 1 であるが，細かいメッシュを用いた FEM と比べても速度ポテンシャルの分布がきれいに出ていることが確認できる．

4.　おわりに

本研究では IGA の解析手順を FEM と比較し，二次元ポテンシャル流れ問題へ適用したことで，以下の結論を得た．

- IGA では有限要素法に比べ，任意形状に対して少ない要素でも精度の高い解析が行える．
- 可視化の際に工夫が必要となる．

今後の課題としては，任意形状の解析領域での解析と，三次元解析への拡張があげられる．

参考文献

1) T.J.R.Hughes, J.A.Cottrell and Y.Bazilevs, Isogeometric analysis : CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.194, pp.4135-4195, 2005.

2) J.A.Cottrell, T.J.R Hughes and Y.Bazilevs, Isogeometric analysis : Toward integration of CAD and FEA, Wiley Publishing, 335p, 2009.

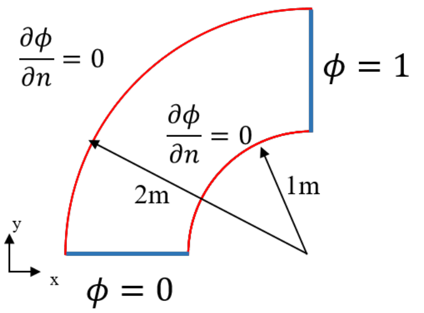


図-3 解析領域

$\Xi = \{0,0,1,1\}$

$H = \{0,0,0,1,1,1\}$

i	$B_{i,1}$	$B_{i,2}$	$B_{i,3}$
1	(2,3)	(1,3)	(1,2)
2	(2,4)	(0,4)	(0,2)

i	$w_{i,1}$	$w_{i,2}$	$w_{i,3}$
1	1	$1/\sqrt{2}$	1
2	1	$1/\sqrt{2}$	1

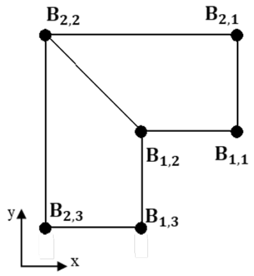
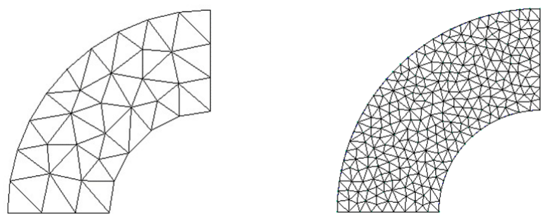
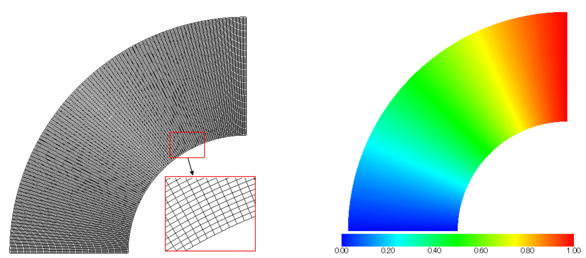


図-4 各パラメータ

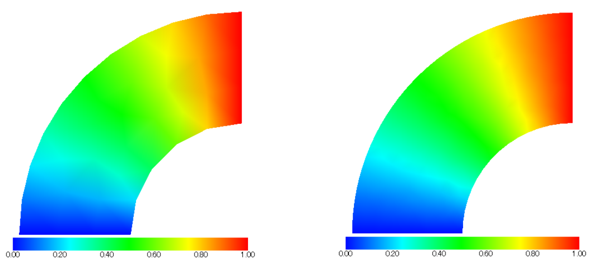


(a) 粗いメッシュ　　(b) 細かいメッシュ

図-5 比較対象



(a)IGA の可視化に用いる格子　　(b)IGA による解析結果



(c)FEM（粗いメッシュ）　　(d)FEM(細かいメッシュ)

図-6 IGA と FEM による解析結果の違い