ランダムな凹凸を有する車輪・レール連成系の振動応答確率解析

新潟大学大学院自然科学研究科 学生員 山田 壮太
新潟大学工学部社会基盤工学プログラム 正会員 阿部 和久
新潟大学工学部社会基盤工学プログラム 正会員 紅露 一寛

1. はじめに

列車走行時による鉄道軌道の動的応答特性の把握は，列車の走行安定性，乗り心地，地盤振動，騒音等の様々な観点から非常に重要である．特にレールは振動発生源である列車・軌道との境界に位置しており，その動的応答特性は連成系全体に大きく影響を及ぼす．加振源となる輪重履歴は，列車の走行速度と車輪・レール間凹凸特性に依存するため，振動の定量的評価にはこれらの設定も不可欠である．著者ら[1)]は，Floquet 変換を用いて定点加振を受ける無限軌道の定常応答解析を，剛基礎に離散支持され凹凸を設定したレールと，走行車輪の時刻歴応答解析により求めた輪重スペクトルの積により，求める手法を構築した．走行車輪の時刻歴応答は，車輪・レール間凹凸に依存するため，本来軌道の変位応答の期待値は，複数の凹凸に対する解より求めることとなる．そこで，本研究では車輪・レール間凹凸が所定の距離相関を有する場合を対象に，レール振動加速度の期待値を導出する方法について検討する．

2. 解析手法

図 1 に示す凹凸 $r(x)$ を有する車輪・無限軌道系を対象とする．車輪は一定速度 V で走行する質量 M の質点で表し，上載荷重を P，車輪変位を w とする．レールは Timoshenko ばりでモデル化し，レールたわみを u，軌道方向座標軸を x とする．

また，レールは等間隔 L で配置されたばね k_0 により離散支持されており，車輪・レール間の接触ばね剛性を k_w とする．レールの運動方程式を Floquet 変換し，時刻 t に関して Fourier 変換すると，次式を得る．

$$
\begin{aligned}
&GAK\frac{\partial}{\partial x}\left(\tilde{\hat{\psi}}-\frac{\partial\tilde{\hat{u}}}{\partial x}\right)-\rho A\omega^2\tilde{\hat{u}}+k_0\tilde{\hat{u}}\delta_L \\
&\quad=\frac{1}{V}F\left(\frac{\tilde{x}}{V}\right)e^{-i\frac{\omega}{V}\tilde{x}} \\
&GAK\left(\tilde{\hat{\psi}}-\frac{\partial\tilde{\hat{u}}}{\partial x}\right)-\rho I\omega^2\hat{\psi}-EI\frac{\partial^2\tilde{\hat{\psi}}}{\partial x^2}=0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ここで，G, K, E, I, A, ρ はそれぞれせん断弾性係数，せん断係数，ヤング率，断面二次モーメント，断面積および密度である．$(\tilde{\ })$ は Floquet 変換，$(\hat{\ })$ は Fourier 変換，ω は円振動数，δ_L は周期 L のデルタ関数である．また，車輪・

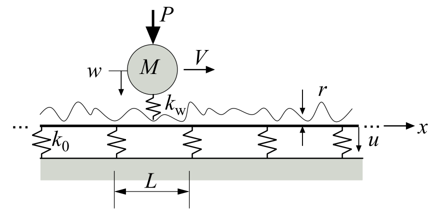

図 1 走行車輪・軌道連成系モデル

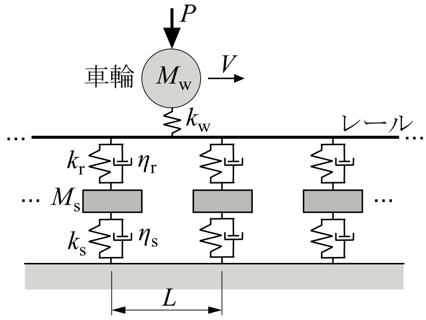

図 2 車輪・軌道系のモデル化

レール間接触力 F は，$u_w(x)=w(t)$ と定義すると，次式で与えられる．

$$
\tilde{F}\left(\frac{\tilde{x}}{V};\kappa\right)=k_w\left\{\tilde{u}_w-\tilde{u}\left(\tilde{x},\frac{\tilde{x}}{V};\kappa\right)+\tilde{r}\right\}
\tag{2}
$$

車輪の運動方程式は次式で与えられる．

$$
MV^2\frac{d^2\tilde{u}_w}{dx^2}=-\tilde{F}+\tilde{P}
\tag{3}
$$

u の Fourier 変換 $\hat{u}(0,\omega)$ は $\tilde{\hat{u}}(0,\omega;\kappa)$ の逆 Floquet 変換により，求めることができる．各 Floquet 変換を Fourier 級数展開する[2)]．すると，レールたわみ $|\hat{u}|^2$ は次式で与えられる．

$$
\begin{aligned}
|\hat{u}|^2=&\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2\int_0^{\frac{2\pi}{L}}[\alpha]\{\tilde{r}\}d\kappa\int_0^{\frac{2\pi}{L}}[\tilde{r}]\{\alpha^*\}d\xi \\
&-\frac{L}{\pi}PR_e\left(\beta_0\int_0^{\frac{2\pi}{L}}[\alpha]\{\tilde{r}\}d\kappa\right)+P^2|\beta_0|^2
\end{aligned}
\tag{4}
$$

ここで，$\{\tilde{r}\}$ は凹凸 r の係数，$\{\alpha\}$，β_0 は軌道・車輪連成系に関する係数である．$|\hat{u}|^2$ の期待値 $E(|\hat{u}|^2)$ は次式で与えられる．

$$
\begin{aligned}
E(|\hat{u}|^2)=&\frac{1}{2\pi}\sum_n\int_0^{\frac{2\pi}{L}}|\alpha_n(\kappa)|^2G\left(\frac{2n\pi}{L}+\kappa\right)d\kappa \\
&+P^2|\beta_0|^2
\end{aligned}
\tag{5}
$$

ここで，G は凹凸のパワースペクトルである．

Key Words: *track structure, random roughness, Floquet transform*
連絡先：〒 950-2181　新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地　TEL: 025(262)7028，FAX: 025(262)6775

3. 解析条件

以下の解析例では 50kgN レールを想定し，$EI = 4.0382\mathrm{MN/m^2}$，$GAK = 168.3\mathrm{MN}$，$\rho A = 50.47\mathrm{kg}$，$\rho I = 0.1544\mathrm{kgm}$ とした．

図 2 より，レール 1 本分のまくらぎ質量 $M_s = 100\mathrm{kg}$，まくらぎ間隔 $L = 0.6\mathrm{m}$，軌道パッド剛性 $k_r = 83\mathrm{MN/m}$，まくらぎ下パッド剛性 $k_s = 10\mathrm{MN/m}$，車輪質量 $M_w = 500\mathrm{kg}$，レール・車輪間ばね定数 $k_w = 2\mathrm{GN/m}$，上載輪重 $P = 70\mathrm{kN}$，車輪走行速度 V を 30m/s と設定した．

また，レール凹凸の距離相関を $c(x) = \sigma^2 e^{-\frac{x}{d}}$ で設定した．なお，解析では $\sigma = 5.0 \times 10^{-5}\mathrm{m}$，$d = 1.5\mathrm{m}$ と設定した．距離相関の Fourier 変換 (パワースペクトル) は，$G(k) = 2\sigma^2 d/[1 + (kd)^2]$ で与えられる．また, レールパッドとまくらぎ下パッドの減衰係数をそれぞれ $\eta_r = 10\mathrm{kNs/m}$，$\eta_s = 3\mathrm{kNs/m}$ と設定した．

4. 解析結果

(1) 離散支持モデルの場合

レール加速度二乗の期待値を，静的輪重のみ評価した解析と，レール凹凸のみ評価した解析とともに図 3 に示す．静的輪重の影響のみとした結果とは，20Hz 以下の低周波数域で一致が見られ，この周波数域はレール凹凸の影響が無視できることが分かる．逆に，それより高い周波数域では，レール凹凸を考慮した結果と一致しており，高周波数域はその影響が支配的であることが分かる．

(2) Winkler ばりモデルとの比較

図 3 より，低周波数域では 46，56Hz のピークを除き，離散支持モデルとで応答の有意な違いは認められない．

(3) 離散支持モデルと時刻歴解析との比較

図 3 には，100 ケースの時間域解析の平均値も示した．図 3 より，46，56Hz における応答のピークは時間域解析の応答にも認められる．これは，ドップラー効果によるものと考えられる．

パラメータ加振周波数は $f_0 = V/L$ で与えられる．これが分散曲線のカットオフ周波数より高い場合，軌道に沿って波動が伝播する．その位相速度を C とすると，定観測点に加振源が近づいて来るとき，見かけの波長 λ は次式で与えられる．

$$\lambda = \frac{1}{f_0}(C - V) \tag{6}$$

これに対応する波数 k，ドップラー効果による振動数を ω とすると，次式を得る．

$$k = \frac{\omega_0}{C - V} = \frac{\omega}{C} \tag{7}$$

したがって，次式が成り立つ．

$$f = \frac{1}{1 - \frac{V}{C}} f_0 > f_0 \tag{8}$$

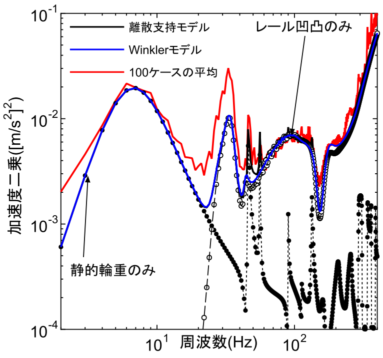

図 3 期待値評価

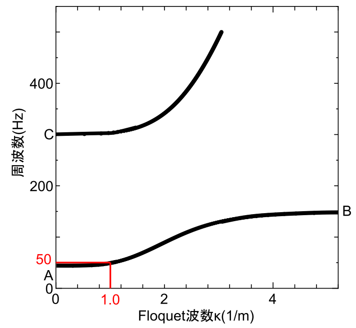

図 4 軌道の分散曲線

同様に，加振源が観測点から遠ざかる時は，次式を得る．

$$f = \frac{1}{1 + \frac{V}{C}} f_0 < f_0 \tag{9}$$

Timoshenko ばり軌道の分散曲線を図 4 に示す．V=30m/s の場合，まくらぎ通過周波数は $f_0 = 50\mathrm{Hz}$ となる．図 4 より，50Hz における伝播波動の波数は $k_0 \fallingdotseq 1(1/\mathrm{m})$ であり，波動の位相速度は $C = 100\pi(\mathrm{m/s})$ となる．これを式 (8)，(9) に代入すると，ドップラー効果による周波数は $f = 45, 55\mathrm{Hz}$ となる．図 3 では，46，56Hz にピークが存在しており，良好な一致が認められ，2 つのピークの存在がドップラー効果によるものであることが確かめられる．

5. おわりに

ここには示さなかったが，パラメータ加振による明確なピークは，Euler ばりモデルでは認められず，離散支持モデルと Winkler モデルとには有意な違いが無かった．このことにより，400Hz 以下の低周波域においても，特にパラメータ加振の影響の適切な評価には，Timoshenko ばりモデルの採用が不可欠であることが分かった．また，Timoshenko ばりの離散支持モデルでは，パラメータ加振によるピークが 2 つ現れるが，これは，ドップラー効果によることが分かった．

参考文献

1) 阿部和久，山田高也，山田壮太，古田勝，末原美智子，吉武翔，紅露一寛：地下鉄軌道構造が近接建物内の振動・騒音に及ぼす影響の解析的評価，第 23 回鉄道工学シンポジウム論文集，pp.275-282，2019.

2) Abe, K., Chida, Y., Quinay, P.E.B. and Koro, K. : Dyanamic instability of a wheel moving on a discretely supported infinite rail, J. Sound Vib., 333, pp.3413-3427, 2014.