ダイナミック流体モデルによる信号急変時の渋滞波伝播に関する新たな解釈

京都大学　フェロー会員　○細田　尚
京都大学　学生会員　小田　克磨
三洋テクノマリン　正会員　白井　秀和

１．はじめに

本研究は，サブクリティカル状態で一様に流れている交通流を考え，信号が青から赤に急変したときに信号地点から上流方向に伝播する渋滞波に対してダイナミック流体モデルを適用した場合，どのような解釈が可能かを理論的に検討したものである．得られた知見に基づき，従来，信号急変時の渋滞場の遡上について例外なく適用されてきたキネマティック・ウェーブ理論[1)]とダイナミック・モデルによる解釈の違いを明確にする．

２．研究の目的

信号急変時の渋滞波の伝播について，古典的な交通流理論では車の加速減速を無視した静的理論であるキネマティック・ウェーブモデル(KWM)を用いた説明がなされてきた．しかし，KWM では先頭車の急停止に対する後続車の追突の発生など慣性効果が無視されているために，そのような伝播現象の実現可能性が全く不明となっている．一方，本研究で用いる Payne モデル[2)]のようなダイナミック流体モデルの場合，車の加速減速挙動が考慮されているが，ダイナミック流体モデルを用いて信号急変時の渋滞波の遡上現象を説明しようとした研究は行われていないように思われる．そこで本研究では，ダイナミック流体モデルを用いて渋滞波の遡上現象がどのように説明可能であるかについて理論的に検討する．

３．ダイナミック流体モデルの基礎式と想定している現象

図-1 に示す座標系を参照して，本研究で用いる流体モデルの基礎式を示せば式(1)，(2)になる．

（質量保存則）
$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho u}{\partial x}=0 \tag{1}$$

（運動方程式）
$$\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{\partial uq}{\partial x}+a^2\frac{\partial \rho}{\partial x}=\frac{u_{max}}{T}\rho\left(1-\frac{\rho}{\rho_{max}}\right)-\frac{q}{T} \tag{2}$$

ここに，ρは交通流の密度，uは車の速度，qはρuで定義される交通流量，xは空間座標，tは時間，Tはドライバーの反応遅れ時間，u_{max}とρ_{max}は Greenshields 式のパラメータでそれぞれ車の最大速度と最大密度を示す．

また，$a^2=\frac{u_{max}}{2T\rho_{max}}$である．

図-1 の原点 O に信号が存在し，ある時刻に青から赤に急変したと仮定する．そのとき車両は急減速し若干の時間遅れをもって O で最大密度ρ_{max}になる．その後，ρ_{max}の領域が一様密度ρ_1の領域に遡上するであろう．車両密度の急変部は後続の車両が減速しながら停止するのでステップ関数のような不連続ではなく，図示したような連続的に急変する分布形になると予想される．

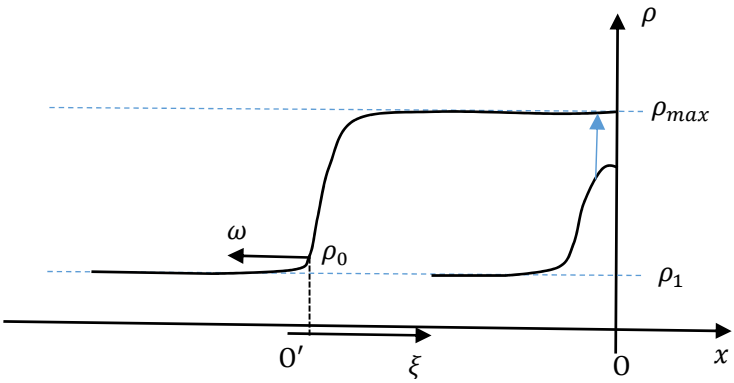

図-1　用いられる座標系と渋滞波の遡上現象

キーワード　交通流，渋滞波，ダイナミック流体モデル
連絡先　〒615-8540　京都市西京区京都大学桂 C1-3 号棟　京都大学工学研究科都市社会工学専攻
Tel. 075-383-3266　E-mail: hosoda.takashi.4w@kyoto-u.ac.jp

© Japan Society of Civil Engineers

4．解析方法と解析の結果

図-1 に示したような渋滞波の連続密度分布形が伝播速度ω（正の一定値）で上流側に遡上すると考える．そこで，基礎式(1)および(2)を式(3)に示したωで移動する座標系（ξ,τ）での表示に変換すると式(4)，(5)になる．

$$\xi = x + \omega t,\ \ \tau = t \qquad (\omega > 0) \tag{3}$$

（質量保存則）
$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial(\omega\rho + q)}{\partial \xi} = 0 \tag{4}$$

（運動方程式）
$$\frac{\partial q}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi}(\omega q + uq + a^2\rho) = \frac{u_{max}}{T}\rho\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}\right) - \frac{q}{T} \tag{5}$$

ここで，（ξ,τ）系では分布形が時間的に変化せず$\partial/\partial\tau = 0$と仮定すると式(4)は式(6)となる．さらに式(6)を一様密度ρ_1，ρ_{max}となる位置ξ_{ρ_1}から$\xi_{\rho_{\max}}$まで積分すると式(7)となる．ただし，ξ_{ρ_1},$\xi_{\rho_{\max}}$はまだ特定されない．

$$\frac{d(\omega\rho + q)}{d\xi} = 0 \tag{6}$$

$$\int_{\xi_{\rho_1}}^{\xi_{\rho max}} \frac{d(\omega\rho + q)}{d\xi} d\xi = \omega\rho_{max} - \omega\rho_1 - q_1 = 0 \tag{7}$$

式(7)を書き換えた式(8)は従来のキネマティックショックの伝播速度と同一である．

$$\omega = \frac{q_1}{\rho_{max} - \rho_1} = \frac{\rho_1}{\rho_{max}\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_{max}}\right)} u_{max}\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_{max}}\right) = \frac{\rho_1}{\rho_{max}} u_{max} \tag{8}$$

一方，式(6)を任意の密度ρとρ_{max}になる位置ξから$\xi_{\rho_{\max}}$まで積分すると任意位置の関係式(9)が得られる．

$$\int_{\xi}^{\xi_{\rho max}} \frac{d(\omega\rho + q)}{d\xi} d\xi = \omega\rho_{max} - \omega\rho - q = 0 \tag{9}$$

これらの関係式を用いて$\partial/\partial\tau = 0$と仮定した運動方程式(5)を変形すると定常密度分布式(10)が得られる．

（定常密度分布式）
$$\left(a^2 - \omega^2\frac{1}{\rho'^2}\right)\frac{d\rho'}{d\xi} = \frac{\rho_{max}u_{max}}{T}\left(\rho' - \frac{\omega}{u_{max}}\right)(1 - \rho') \tag{10}$$

ただし，ρ'は$\frac{\rho}{\rho_{max}}$として定義される無次元密度である．

図-1 を参照して，式(10)を任意に設定できる密度ρ'_0をもつξ座標の原点（$\xi = 0$）からξまで積分すると，ξ座標系での密度分布形を表す式(11)が導かれる．ただし，式(11)中の定数は式(12)に記述した．

$$\int_0^{\xi} \frac{u_{max}}{T} d\xi = \frac{u_{max}}{T}\xi = A_1 \log\frac{\rho'}{\rho'_0} - A_2\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho'_0}\right) + A_3 \log\frac{\rho' - \rho'_1}{\rho'_0 - \rho'_1} - A_4 \log\frac{1 - \rho'}{1 - \rho'_0} \tag{11}$$

$$A_1 = {u_{max}}^2\left(1 + \frac{\omega}{u_{max}}\right), A_2 = \omega u_{max}, A_3 = \frac{a^2 - {u_{max}}^2}{1 - \frac{\omega}{u_{max}}}, A_4 = \frac{a^2 - \omega^2}{1 - \frac{\omega}{u_{max}}} \tag{12}$$

$\rho_1 = 0.1$，$\rho_{max} = 0.25$，$u_{max} = 15$(m/s), $T = 0.1$(s)，$\rho'_0 = 0.405$と設定した場合の式(11)の分布形を図-2 に図示した．ω =6.0(m/s), a=17.32(m/s)である．(a-u_1> ωに注意．)初期一様密度 0.1 は車間距離 10(m)に対応しており，後続車両はその 10(m)程度の間で衝突せずに急減速して停止していることが分かる．$\xi_{\rho_{\max}}$は+∞になる．

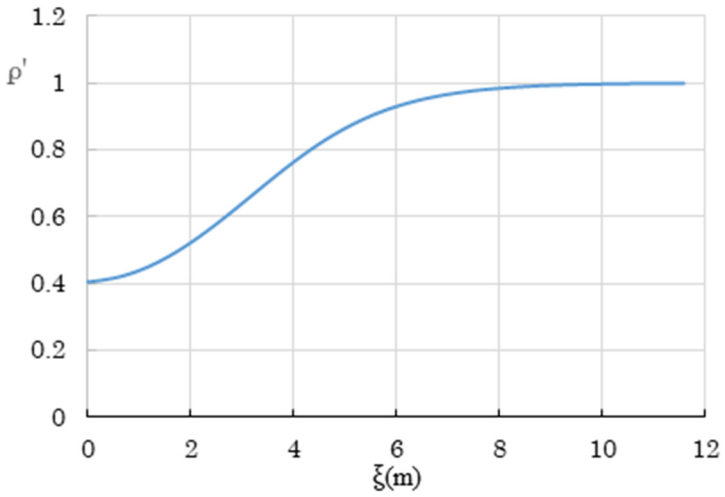

図-2　移動座標系での急変定常密度分布形

5．おわりに

今後，同一条件下でミクロシミュレーションを行い式(11)に示した分布形と比較したい．

[参考文献] 1) ハーバーマン, R.（中井暉久訳）：交通流の数学モデル，現代数学者，1981．2) Payne, H.J.: Models of freeway traffic and control, Simulation Councils Proc. Ser.：Mathematical Models of Public Systems, 1 no.1, pp.51-61, Editor G.A. Bekey, La Jolla, CA,1971.

© Japan Society of Civil Engineers