「u-w-p 二相質点系モデル」による飽和地盤の一次元動的変形問題における即時水圧の出現および水圧の二段階遷移現象に関する一考察

名古屋大学　正会員　○豊田　智大
ﾌｪﾛｰ会員　野田　利弘

1．はじめに

水～土骨格連成解析は多くの場合 ***u-p*** formulation と呼ばれる手法で定式化される．これは，間隙水の静的浸透の仮定により方程式系を縮小する近似解法であるが，間隙水の運動を準静的に取り扱う代償として，高透水性土の連成問題のような間隙水の動的浸透を伴う諸問題への適用は著しく制限される．そこで著者らは，***u-w-p*** formulation に基づく水～土連成問題の支配方程式を静的浸透の仮定なしに直接離散化して解く解析手法を新たに開発してきた[1)]．昨年度までの報告では，本手法を低透水性土～高透水性土の一次元動的変形問題に適用し，高透水性土において非調和な振動現象の出現が解かれることや，解析初期に生じる「鉛直荷重と即時水圧の不一致」が固液相慣性力による荷重分担の帰結として理解されることを示してきた[2)]．本稿ではその続報として，即時水圧発現後の水圧変動における二段階遷移現象を取り上げ，これが「固液二相質点系」の運動を解いて求まる 2 つの指数関数解の収束速度の違いからも説明できることを示す．

2．即時水圧の出現とその後の水圧変動[2)]

一次元水～土連成動的変形問題を ***u-w-p*** formulation で解く．有限要素メッシュと弾性体の材料定数はそれぞれ**図-1**, **表-1** のように設定する．ここでは，瞬間載荷に等価な初期条件として模型全体に初期水圧 10kPa を与え，これが 0kPa まで片面排水下で消散する過程での沈下量 ρ と水圧 p の推移を調べる．透水係数は k=10^{-3} cm/s（やや高透水性）とした．

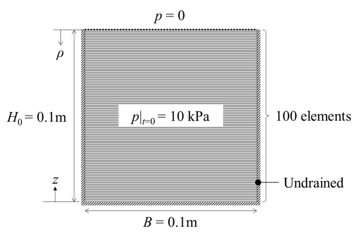

図-1　有限要素メッシュ

表-1　材料定数

Young's modulus E	10000 kN/m^2
Poisson's ratio ν	0.35
Initial porosity n_0	0.50
Density of soil particle ρ^s	2.65 g/cm^3
Density of water ρ^f	1.00 g/cm^3

模型内の下から 1 番目～100 番目の代表的な要素における水圧～時間関係を**図-2** に示す．ただし，初期の現象を観察するため，時間は対数軸で表示した．時刻 t =10^{-4}sec 以降，上端の排水条件に近い要素から順に水圧が消散してゆく様子が確認できる（圧密）．だが，それ以前の解析のごく初期段階においては，初期水圧として p_0=10kPa を与えているにもかかわらず，即時水圧 p_{I}=5.479kPa が一様に解かれており，その後，時刻 t=10^{-8}sec~10^{-5}sec にかけて水圧が 10kPa まで回復する現象が解かれる．これが解析初期段階において鉛直荷重が間隙水圧のみならず固液相慣性力によっても分担されることによるものであることは前報[2)]で述べた．ここでは即時水圧発現後の水圧の二段階遷移（5.479kPa→10kPa→0kPa）が次節の二相質点系モデルによる連立常微分方程式の解として解釈可能であることを示す．

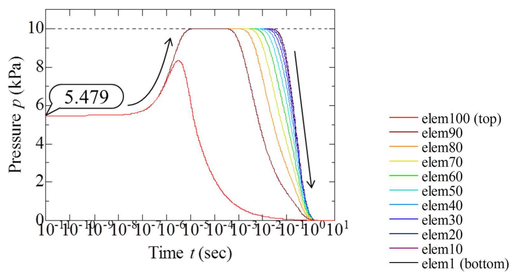

図-2　水圧-時間関係

3．二相質点系モデルによる初期値問題の定式化とその解

固液相変位場を**図-3** の二質点系の運動$x_s = x_s(t)$，$x_f = x_f(t)$に代表させる．以下の式(1)，(2)は固相および液相の運動方程式であるが，これに水～土骨格連成式(3)を幾何拘束（束縛条件）として連立し，Lagrange の未定乗数法に基づき，束縛力を考慮した運動方程式を立てている．

$$m_s\ddot{x}_s + Kx_s - \frac{n^2\Gamma_w}{k}\left(\dot{x}_f - \dot{x}_s\right) = F + \Lambda\frac{\partial g}{\partial x_s} \qquad (1)$$

キーワード　Full-formulation，***u-w-p*** formulation，水～土骨格連成解析，高透水性，有限変形，有限要素法
連絡先　〒464-8603　名古屋市千種区不老町　名古屋大学工学部 9 号館 3 階　ＴＥＬ：052-789-3834

$$m_f \ddot{x}_f + \frac{n^2 \Gamma_w}{k}\left(\dot{x}_f - \dot{x}_s\right) = \Lambda \frac{\partial g}{\partial x_f} \tag{2}$$

$$g = g\left(x_s, x_f\right) = (1-n)x_s + n x_f = 0 \tag{3}$$

ここに，$m_s = (1-n)\rho^s V$，$m_f = n\rho^f V$は各相の代表質量，ρ^s，ρ^fは土粒子と間隙水の密度，$K = A/m_v H$はバネ定数，m_vは体積弾性係数，$F = -qA$，$\Gamma_w = \gamma_w V$は鉛直荷重，Darcy 抵抗力，n，k，γ_wは間隙率，透水係数，水の単位体積重量である（V:体積，A:底面積）．式(1)右辺第 2 項および式(2)右辺は連成式(3)の制約下での束縛力であり，式(1)~(3)を解いて求まる未定乗数Λは「水圧合力」という物理的意味をもつ．また，上付きドット（˙）は時間微分d/dtを表す．微小変形を想定し間隙率は定数と見做す．上式は以下のように無次元化できる．

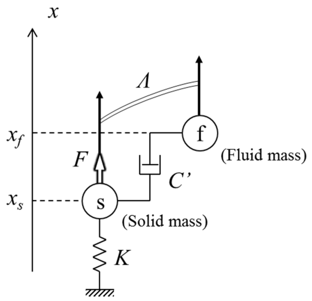

図-3　一次元質点系モデル

$$\frac{G_s \mathrm{e}}{1+G_s \mathrm{e}} \mathring{\mathring{y}}_s - 2hn^2\left(\mathring{y}_f - \mathring{y}_s\right) + y_s = 1 + (1-n)\lambda \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{e}^2}{1+G_s \mathrm{e}} \mathring{\mathring{y}}_f + 2hn^2\left(\mathring{y}_f - \mathring{y}_s\right) = n\lambda \tag{5}$$

$$y_s + \mathrm{e} y_f = 0 \tag{6}$$

ただし，無次元未知関数として$y_s = x_s/\delta_0$，$y_f = x_f/\delta_0$，$\lambda = \Lambda/F$（$\delta_0 = F/K$は最終沈下量）を導入するとともに，独立変数に無次元時間$\tau = \omega t$を用い，無次元時間微分を（上付きサークル ° ）で表す．式中のパラメータ，$\omega^2 = K/\left(m_s + m_f/\mathrm{e}^2\right)$，$h = (\Gamma_w/k)/2\left(m_s + m_f/\mathrm{e}^2\right)\omega$，$G_s$，eはそれぞれ非減衰固有角速度，減衰定数，土粒子の比重および間隙比である．これを無次元固相変位$\mathring{\mathring{y}}_s$について解くと，調和減衰振動の微分方程式

$$\mathring{\mathring{y}}_s + 2h\mathring{y}_s + y_s = 1 \tag{7}$$

となり，これを初期条件$y_s(\tau=0)=0$，$dy_s(\tau=0)/d\tau = 0$の下で解くことで，

$$y_s(\tau) = 1 - \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{h^2-1}}\left\{\left(h+\sqrt{h^2-1}\right)e^{-\left(h-\sqrt{h^2-1}\right)\tau} - \left(h-\sqrt{h^2-1}\right)e^{-\left(h+\sqrt{h^2-1}\right)\tau}\right\} & (h>1) \\ (1+\tau)e^{-\tau} & (h=1) \\ e^{-h\tau}\left(\cos\sqrt{1-h^2}\tau + \dfrac{h}{\sqrt{1-h^2}}\sin\sqrt{1-h^2}\tau\right) & (h<1) \end{cases} \tag{8}$$

$$-\lambda(\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{h^2-1}}\left\{\left[r_I\left(h+\sqrt{h^2-1}\right)-2h\right]e^{-\left(h+\sqrt{h^2-1}\right)\tau} \right. \\ \qquad \left. - \left[r_I\left(h-\sqrt{h^2-1}\right)-2h\right]e^{-\left(h-\sqrt{h^2-1}\right)\tau}\right\} & (h>1) \\ e^{-\tau}\left\{r_I - (r_I-2)\tau\right\} & (h=1) \\ e^{-h\tau}\left\{r_I\cos\sqrt{1-h^2}\tau + \dfrac{h}{\sqrt{1-h^2}}(-r_I+2)\sin\sqrt{1-h^2}\tau\right\} & (h<1) \end{cases}, \quad r_I = \frac{1+\mathrm{e}}{1+G_s\mathrm{e}} \tag{9}$$

が得られる．同式より，系の応答が無次元パラメータhに応じて過減衰から減衰振動まで変化することが確認された．また，$h>1$の場合には無次元水圧$-\lambda$が異なる速度$c_1 = h+\sqrt{h^2-1}$，$c_2 = h-\sqrt{h^2-1}$で消滅する 2 つの指数関数の線形結合で書かれ，前者は即時水圧 5.479kPa の発現から 10kPa までの回復過程を，後者は水圧 10kPa から 0kPa までの圧密過程をそれぞれ表現していることが確認された．

４．おわりに

二相質点系モデルで表現した水～土連成問題は減衰振動方程式に帰着され，無次元時間τを用いて整理すると，無次元変位y_sは無次元パラメータh，無次元水圧はhおよびr_Iの式で書けることを示した．また，$h \gtreqless 1$に応じて解の性質が変化すること（過減衰～減衰振動），水圧の二段階遷移現象が指数関数で表された二つの基本解の収束速度の差に起因することを示した．境界値問題として求解した際の振動の非調和性は別報に譲る．

謝辞　本研究の遂行にあたり，JSPS 科研費 17H01289 の助成を受けた．

参考文献

1) Toyoda, T. and Noda, T.: Development and verification of a soil–water coupled finite deformation analysis based on u–w–p formulation…, Soils Found, Vol.59, No.4, pp.888-904. 2) 豊田, 野田：間隙水の慣性の影響を考慮した高透水性土の動的即時沈下解析, 土木学会第 74 回年次学術講演会, 2019.