# Cam-clay model を用いた有限変形解析における体積ロッキング現象の回避に関する検討

| ○東北大学工学部     | 学生員 | 窪田 友也  |
|--------------|-----|--------|
| 東北大学大学院工学研究科 | 正 員 | 京谷 孝史  |
| 東北大学大学院工学研究科 | 正 員 | 山田 正太郎 |
| 東北大学大学院工学研究科 | 正 員 | 松原 成志朗 |

## 1 はじめに

変形勾配の弾塑性乗算分解に基づく Cam-clay model を 搭載した有限変形解析コードを開発した.山川ら<sup>1)</sup>に倣い Return-mapping アルゴリズムを用いた陰的応力更新法を構 築するとともに,それに整合する接線係数を導出し,適用し た.本稿ではこのコードを用いて解析を行う.また,Camclay model は弾性的にも塑性的にも体積変化を生じうるモ デルであるが,限界状態近傍ではほぼ非圧縮性を示すため に体積ロッキング現象が生じうることを示す.さらに,こ の現象を回避するのに F-bar 法が有効であることも示す.

## 2 弾塑性モデル

#### 2.1 諸量の定義

変形勾配の乗算分解に基づく弾塑性有限変形理論に基づいて定式化を行う.次式のように変形勾配 F を弾性変形勾配 F<sup>e</sup>と塑性変形勾配 F<sup>p</sup>へ乗算分解する.

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}} \boldsymbol{F}^{\mathrm{p}} \tag{1}$$

このとき,塑性変形勾配 F<sup>P</sup> は基準配置から着目する物質点 近傍で定義される中間配置,弾性変形勾配 F<sup>e</sup> は中間配置か ら現在配置への変形を表す.

弾性右 Cauchy-Green テンソル  $\bar{C}^{e}$ ,中間配置を参照とす る第 2Piola-Kirchhoff 応力  $\bar{S}$ , Mandel 応力  $\bar{M}$  および塑性速 度勾配  $\bar{L}^{p}$ を以下のように定義する.

$$\bar{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}} := \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}^{\mathrm{T}}} \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}$$
(2)

$$\bar{\boldsymbol{S}} := \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}^{-1}} \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}^{-\mathrm{T}}} \tag{3}$$

$$\bar{\boldsymbol{M}} := \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}^{\mathrm{T}}} \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}^{-\mathrm{T}}} \tag{4}$$

$$\bar{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}} := \dot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{p}} \boldsymbol{F}^{\mathrm{p}-1} \tag{5}$$

ここで、au は現在配置を参照する Kirchhoff 応力である.上 記の塑性速度勾配  $\overline{L}^p$  と Mandel 応力  $\overline{M}$  は塑性散逸仕事に おいて共役の関係にあり、後述する塑性流れ則などの記述 に用いる.

### 2.2 超弹性構成則

超弾性ポテンシャル関数  $\Psi$  として, Houlsby etal,(2005)<sup>4)</sup> を参考に弾性体積変化率  $J^{e}$ (:= det $F^{e}$ ) および弾性右 Cauchy-Green テンソルの等積変形成分  $\hat{C}^{e}$ (:=  $J^{-2/3}\bar{C}^{e}$ ) を用いた次式 の関数を与える.

$$\Psi(J^{\mathbf{e}}, \hat{\vec{C}}^{\mathbf{e}}) = \bar{P}_0 \tilde{\kappa}^* (1 - \exp(z)) \tag{6}$$

$$z = -\frac{1}{\tilde{\kappa}^*} \ln \frac{J^*}{J} - \frac{\mu_0}{2\bar{P}_0 \tilde{\kappa}^*} \left( \operatorname{tr} \hat{\bar{C}}^e - 3 \right)$$
(7)

ここで、 $\bar{P}_0$ は基準応力、 $\tilde{\kappa}^*$ は膨張指数、 $\mu_0^e$ は基準応力におけるせん断弾性係数、 $J(:= \det F)$ は体積変化率である.

### 2.3 硬化則および降伏関数

Cam-clay model を使用するため,塑性体積変化率 JP を用 いて等方硬化則以下のように与える.

$$\bar{P}_{\rm c} := \bar{P}_{\rm c0} (J^{\rm p})^{-\Theta} \tag{8}$$

$$\Theta := \frac{1}{\tilde{\lambda}^* - \tilde{\kappa}^*} \tag{9}$$

ここで, $\bar{P}(:=\frac{1}{3}\text{tr}(\bar{M}))$ は Mandel 平均垂直応力, $\bar{P}_c$ は圧密 降伏応力, $\bar{P}_{c0}$ は初期圧密降伏応力, $\tilde{\lambda}^*$ は圧縮指数, $\tilde{\kappa}^*$ は 膨張指数である.

圧密降伏応力 *P*<sub>c</sub>の変化による硬化・軟化に対応し,楕円 形の降伏曲面が等方的に拡大・縮小することを考慮し次の 降伏関数を考える.

$$f := \frac{\bar{P}}{\bar{P}_{c0}} \left( 1 + \frac{\bar{Q}}{\bar{P}M^2} \right) - \frac{\bar{P}_c}{\bar{P}_{c0}}$$
(10)

ここで、M は限界状態における応力比、 $\bar{Q}\left(:=\sqrt{\frac{3}{2}}\|\operatorname{dev}\bar{M}\|\right)$ は Mandel せん断応力、 $\operatorname{dev}\bar{M}\left(:=\bar{M}-\bar{P}I\right)$ は応力の偏差成分である.

2.4 塑性流れ則

塑性流れ則を次式で与える.

$$\bar{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}} = \dot{\boldsymbol{\gamma}} \frac{\partial g}{\partial \bar{\boldsymbol{M}}} \tag{11}$$

ここで,yは塑性乗数である.また,gは塑性ポテンシャル 関数であり,降伏関数と同じ関数を用いる (f = g).

Key Words: 弾塑性乗算分解,有限変形解析,精度検証

<sup>〒 980-8579</sup> 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06, TEL 022-795-7489

# 3 Return-mapping による陰的応力更新

第2節で述べた有限変形弾塑性モデルを数値解析で解く ために,Return-mappingアルゴリズムを採用した.速度形 で与えられる変数に関し時間離散化および陰的近似を行い, 次ステップの未知の応力を陰的に更新した.さらに同アル ゴリズムに整合する接線係数を求め力のつり合いを満たす ための全体 Newton-Raphson 法に適用した.

## 4 体積ロッキング現象とその対策

Cam-clay model は限界状態近傍においてほぼ非圧縮性 (det $F \simeq 1$ )を示すため、変形が進展し塑性変形が卓越する 際に体積ロッキング現象が生じると考えられる.体積ロッ キング現象の解消のために、F-bar 法<sup>2)</sup>を採用した.

## 5 数值解析例

図1左に示す三軸供試体を模擬した有限要素モデルにつ いて解析例を示す.境界条件を図1右に示す.端面に摩擦 がある状態を想定し,上側から強制変位を与えて圧縮した. 側面にはセル圧を想定した追従荷重を作用させた.



図-1 有限要素モデルおよび境界条件

解析に使用した材料定数および初期条件を表 1 に示す. 初期の応力は σ<sub>11</sub> = σ<sub>22</sub> = σ<sub>33</sub> = -100kPa とした.

| <b>表–1</b> 材料定数および初期状態量        |         |  |
|--------------------------------|---------|--|
| 材料定数および初期状態量                   | 値       |  |
| 基準圧力 $\bar{P}_0$               | -100kPa |  |
| 基準弾性体積変化 Je                    | 1.0     |  |
| 基準圧力におけるせん断弾性係数 $\mu_0^{ m e}$ | 2.0MPa  |  |
| 基準圧密降伏応力 P <sub>c0</sub>       | -400kPa |  |
| 限界応力比 M                        | 1.05    |  |
| 膨張指数 <del>κ</del> *            | 0.025   |  |
| 圧縮指数 $\tilde{\lambda}^*$       | 0.082   |  |

軸ひずみ $\varepsilon_a = 50\%$ におけるせん断応力qのコンター図を 図 2 に示す.実験と同様に整理した軸ひずみ $\varepsilon_a$ -せん断応力 q関係と、軸ひずみ $\varepsilon_a$ -体積ひずみ $\varepsilon_v$ 関係を図 3 に示す.



図-2 せん断応力 q の分布図 (E<sub>a</sub> = 50%)



図-3 要素試験とみなした挙動

図2より, F-bar 法を用いた方が供試体端部での q の増加 が緩和されていることが分かる.図3より,体積変化が収 束するあたりから q に違いが生じており, F-bar 法を用いな い場合には,体積ロッキング現象が生じていること,およ び, F-bar 法を適用したことでそれが回避できていたことが 伺える.

#### 参考文献

- 1) 山川優樹,山口洋介,橋口公一,池田清宏,拡張下負荷面 Cam-clay model の有限変形理論に基づく定式化とリターン マッピングを用いた陰的応力更新法,応用力学論文集 Vol.13, pp.411-422, 2010.
- E. A. de SOUZA NETO, D. PERIĆ, M. DUTKO and D. R. J. OWEN : Design of simple low order finite elements for large strain analysis of nearly incompressible solids, *Int. J. Solids Structures* Vol. 33 No. 20-22, pp. 3277-3296, 1996.
   Hashiguchi, K.: On the linear relations of V – lnp and lnv – lnp
- Hashiguchi, K.: On the linear relations of V lnp and lnv lnp for isotropic consolidation of soils. *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.* 19, 367-376, 1995.
   Houlsby, G. T., Amorosi, A. & Rojas, E.: Elastic moduli of soils
- Houlsby, G. T., Amorosi, A. & Rojas, E. : Elastic moduli of soils dependent on pressure: a hyperelastic formulation, *Géotechnique* 55, No. 5, 383-392, 2005.