

不確実性を考慮した洪水予測における Fokker-Planck 方程式と Kalman フィルタとの関係

中央大学 正会員 ○成 岱蔚
中央大学 フェロー会員 山田 正

1. 目的

不確実性を考慮した洪水予測の手法はKalmanフィルタ、粒子フィルタなどが挙げられる。これらの洪水予測手法には多くの実績¹⁾があるが、洪水現象の不確実性の性質および物理的な要因に関する研究は十分ではない。それらに対し、山田・吉見ら²⁾は、伊藤の確率微分方程式とFokker-Planck方程式を用いて降雨の不確実性を考慮した流出過程を表現する先行研究を行った。本研究では、不確実性の物理的性質を考慮できる理論の構築を行い、Fokker-Planck方程式とKalmanフィルタの関係を明らかにすることが目的である。その結果より、Kalmanフィルタは実質上Fokker-Planck方程式の近似解であることを示した。さらに、Fokker-Planck方程式の近似解を用いて、各パラメータが洪水流の流出高の予測区間に与える影響を定量的に評価できるようになった。

2. 単一斜面における降雨流出基本式に基づく Kalman フィルタ

本研究が用いる基本式は山田・呉ら³⁾によって提案された単一斜面における降雨流出基本式である。

$$\frac{dq}{dt} = \alpha q^\beta (r(t) - q) \quad (1)$$

ここに、 α, β は流域の物理性質（土質、斜面勾配など）によって決まるパラメータである。 $q(t)$ は流出高[mm/h]であり、流域の支配断面の流量を流域面積で割ったものである。 $r(t)$ は流域平均有効降雨強度[mm/h]である。星ら⁴⁾により、Kalmanフィルタを降雨流出解析に適用する一般的な定式化手法を提案された。その手法を簡単にまとめると以下になる：1，状態変数の伝達方程式を定式化する。2，状態変数の推定誤差共分散伝達方程式を定式化する。3，観測方程式を定式化する。これらの3つの方程式から、Kalmanフィルタを定式化する。観測方程式は観測手法とシステムの関係を表し、Fokker-Planck方程式には含まれていないため、ここでは議論しない。具体的な式の導出を略し、単一斜面における降雨流出基本式に基づく状態変数の伝達方程式は：

$$\begin{pmatrix} q_{k+1} \\ \alpha_{k+1} \\ \beta_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial f}{\partial q} \Delta t & \frac{\partial f}{\partial \alpha} \Delta t & \frac{\partial f}{\partial \beta} \Delta t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_k \\ \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f \Delta t - \frac{\partial f}{\partial q} \Delta t - \frac{\partial f}{\partial \alpha} \Delta t - \frac{\partial f}{\partial \beta} \Delta t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

になる。ここに $f(\alpha, \beta, q) = \alpha q^\beta (r(t) - q)$ は式(1)の右辺である。下付き k は時刻、 Δt は k 時刻と $k+1$ 時刻の時間差である。式(2)の右辺に k 時刻の状態変数 (α_k, β_k, q_k) を代入すれば、 $k+1$ 時刻の状態変数 $(\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}, q_{k+1})$ が得られる。次に、推定誤差共分散伝達方程式は：

$$\begin{pmatrix} Covq_{k+1} & Cov\alpha_{k+1} & Cov\beta_{k+1} \\ Cov\alpha_{k+1} & Cov\alpha_{k+1} & Cov\alpha_{k+1} \\ Cov\beta_{k+1} & Cov\alpha_{k+1} & Cov\beta_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial f}{\partial q} \Delta t & \frac{\partial f}{\partial \alpha} \Delta t & \frac{\partial f}{\partial \beta} \Delta t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Covq_k & Cov\alpha_k & Cov\beta_k \\ Cov\alpha_k & Cov\alpha_k & Cov\alpha_k \\ Cov\beta_k & Cov\alpha_k & Cov\beta_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial f}{\partial q} \Delta t & \frac{\partial f}{\partial \alpha} \Delta t & \frac{\partial f}{\partial \beta} \Delta t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \quad (3)$$

になる。ここに Cov は各状態変数の共分散行列である。式(3)を用いて、共分散行列を時間的に更新できる。

3. 洪水予測における Fokker-Planck 方程式の近似解

山田・吉見ら²⁾の研究により、降雨流出過程の状態変数 (α, β, q) の確率密度関数 $P(q, \alpha, \beta, t)$ はFokker-Planck方程式に従う。降雨流出過程の状態方程式は式(4-1)である。式(4-1)の一番目の式は式(1)と同様であり、パラメータの不確実性を考慮するため、 α, β の時間発展式も必要である。

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = f(\alpha, \beta, q, t) = \alpha q^\beta (r(t) - q) \\ \frac{d\alpha}{dt} = 0 \\ \frac{d\beta}{dt} = 0 \end{cases} \quad (4-1) \Rightarrow \begin{cases} \frac{dq_0}{dt} + \varepsilon \frac{dq_1}{dt} = f(\alpha_0 + \varepsilon \alpha_1, \beta_0 + \varepsilon \beta_1, q_0 + \varepsilon q_1, t) \\ \frac{d\alpha_0}{dt} + \varepsilon \frac{d\alpha_1}{dt} = 0 \\ \frac{d\beta_0}{dt} + \varepsilon \frac{d\beta_1}{dt} = 0 \end{cases} \quad (4-2) \Rightarrow \begin{cases} \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q} q_1 + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \alpha_1 + \frac{\partial f}{\partial \beta} \beta_1 \\ \frac{d\alpha_1}{dt} = 0 \\ \frac{d\beta_1}{dt} = 0 \end{cases} \quad (4-3)$$

式(4-1)と対応するFokker-Planck方程式は下の式(5-1)である。

$$\frac{\partial P(q, \alpha, \beta, t)}{\partial t} + \frac{\partial \alpha q^\beta (r(t) - q) P(q, \alpha, \beta, t)}{\partial q} = 0 \quad (5-1) \Rightarrow \frac{\partial P(q_1, \alpha_1, \beta_1, t)}{\partial t} + \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial q} q_1 + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \alpha_1 + \frac{\partial f}{\partial \beta} \beta_1 \right) P(q_1, \alpha_1, \beta_1, t)}{\partial q_1} = 0 \quad (5-2)$$

KalmanフィルタとFokker-Planck方程式の関係を明らかにするため、式(5-1)を簡単化する必要がある。式(4-1)に対して摂動展開をすると式(4-2)になる。ここに、 ε は摂動のオーダーを表す変数である。さらに、 ε の0次オーダー（下付き0）を決定論的な式と考え、不確実性がないとし、システムの不確実性はすべて ε の1次オーダー

一の式, 式(4-3)に含まれていることを仮定する. 式(4-3)と対応するFokker-Planck方程式は式(5-2)になる. 式(5-2)の右辺に状態変数をかけ, 積分すると, 共分散行列の時間発展に関する連立常微分方程式, 式(6-1)が得られる. 式(6-1)はFokker-Planck方程式(5-2)の近似式とも言い得る.

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dCovqq(t)}{dt} &= 2 \frac{\partial f}{\partial q} Covqq(t) + 2 \frac{\partial f}{\partial \alpha} Covaq(t) + 2 \frac{\partial f}{\partial \beta} Cov\beta q(t) \\ \frac{dCovaq(t)}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial q} Covaq(t) + \frac{\partial f}{\partial \alpha} Covaa(t) + \frac{\partial f}{\partial \beta} Cov\beta q(t) \\ \frac{dCov\beta q(t)}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial q} Cov\beta q(t) + \frac{\partial f}{\partial \alpha} Cov\alpha\beta(t) + \frac{\partial f}{\partial \beta} Cov\beta\beta(t) \\ \frac{dCovaa(t)}{dt} &= 0 \\ \frac{dCov\alpha\beta(t)}{dt} &= 0 \\ \frac{dCov\beta\beta(t)}{dt} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (6-1) \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} Covqq(t) &= A(t)^2 \int_0^t \frac{2}{A(T)^2} (Covaq(T) + Cov\beta q(T)) dT \\ Covaq(t) &= Covaa(0)A(t) \int_0^t \frac{1}{A(T)} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(T) dT \\ Cov\beta q(t) &= Cov\beta\beta(0)A(t) \int_0^t \frac{1}{A(T)} \frac{\partial f}{\partial \beta}(T) dT \\ Covaa(t) &= Covaa(0) \\ Cov\alpha\beta(t) &= 0 \\ Cov\beta\beta(t) &= Cov\beta\beta(0) \end{aligned} \right. \quad (6-2) \quad (6-2)$$

初期条件
 $Covqq(0) = 0$
 $Covaq(0) = 0$
 $Cov\beta q(0) = 0$
 $Covaa(0) = Covaa(0)$
 $Cov\alpha\beta(0) = 0$
 $Cov\beta\beta(0) = Cov\beta\beta(0)$
 $A(t) = e^{\int_0^t \frac{\partial L}{\partial q}(T) dT}$

式(6-1)を式(3)と比較すると, 式(3)は式(6-1)の時間方向の二次精度差分式ことがわかった. このことからKalmanフィルタは実質上Fokker-Planck方程式の近似解であることを明らかにした. さらに, 式(6-1)は厳密解が存在する. 特にパラメータ α, β の不確実性のみを考慮する場合 (初期条件 $Covaa(0)$ と $Cov\beta\beta(0)$ 以外に全部0とする), その厳密解を式(6-2)に示している. 式(6-2)を分析すると, 共分散行列の時間発展は線形であることが分かった. この結果を利用し, 各パラメータが洪水の流出高予測区間に与える影響を定量的に評価ができる.

4. 理想実験

式(6-2)を検証するため, 以下の理想実験を行った. パラメータ α, β は正規分布に従うと仮定し, $\alpha, \beta \sim N(0.045, (0.3 * 0.045)^2), N(0.40, (0.3 * 0.40)^2)$ と設定した. 降雨強度が20mm/hの雨を50時間降り続くと設定した. 解く順番は下記のとおり: 1, 降雨強度と α, β の平均値を式(1)に代入し, 方程式を解く. 得られた解 $q(t)$ を $f(\alpha, \beta, q)$ に代入し, $(\partial f / \partial \alpha)(t), (\partial f / \partial \beta)(t), (\partial f / \partial q)(t)$ を算出する. 最後に, その結果を式(6-2)に代入し, $Covqq(t)$ が得られる.

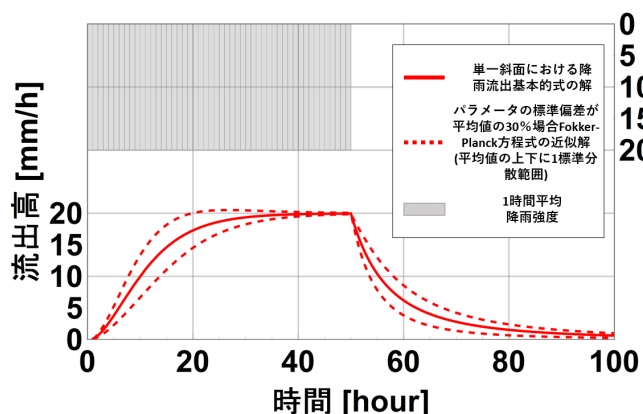


図-1 Fokker-Planck 方程式の近似解 (平均値上下1標準偏差範囲)

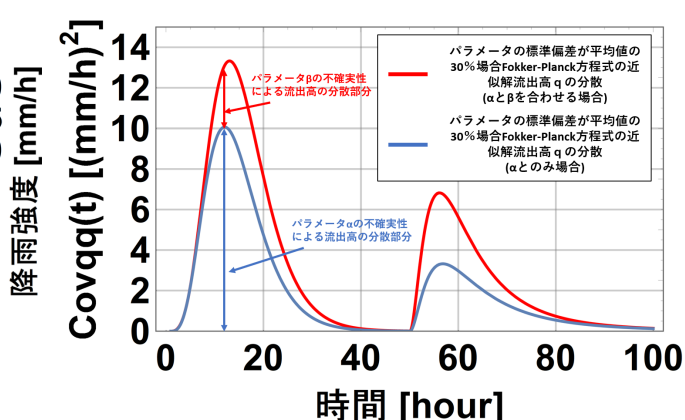


図-2 Fokker-Planck 方程式の近似解 (流出高の分散)

図-1は流出高の平均値上下1標準偏差分の範囲を示している. 流出高が正規分布に従うと仮定する場合, この範囲は68%予測区間である. 標準偏差の二乗が分散であり, つまり式(6-2)の $Covqq(t)$ になる. $Covqq(t)$ は初期条件 $Covaa(0)$ と $Cov\beta\beta(0)$ に関して線形であることから, パラメータ α による分散とパラメータ β による分散を評価することができる. 今後はこの手法を実時間の洪水予測に適用し, 予測結果の不確実性を物理成因ごとに定量的に評価を行っていく.

参考文献

- ・1) (財)北海道河川防災研究センター・研究所 編集・発行:「実時間洪水予測システム理論解説書」, 2004.
- ・2) 吉見和紘, 山田正, 山田朋人: 確率微分方程式の導入による降雨流出過程における降雨の不確実性の評価, 土木学会論文集 B1(水工学) Vol. 71, No. 4, pp. 259-264, 2015.
- ・3) 呉修一, 山田正, 吉川秀夫: 表面流の発生機構を考慮した斜面多層降雨流出計算手法に関する研究, 土木学会水工学論文集, Vol. 49, pp. 169-174, 2005.