

交互砂州の発生・発達過程における 底面位の伝播速度式の適用性

新潟大学大学院自然科学研究科 学生会員○石原 道秀
新潟大学災害・復興科学研究所 正会員 安田 浩保

1. はじめに

砂州河川の底面には交互砂州が自発的に形成される。この交互砂州は伝播性を有していることが実河川や模型実験で確認され、波動現象の一種と見做されているが、その伝播性については不明なことが多い。

波動現象はしばしば双曲型偏微分方程式を用いて記述される。仮に底面位 z に関する双曲型偏微分方程式が得られ、 z の伝播速度が定式化できれば、交互砂州の伝播速度の時間・空間分布の把握が見込める上、その伝播機構の解明も期待できる。これまでに交互砂州についてのさまざまな研究が行われている。この中で底面位 z の双曲型偏微分方程式の導出の先行例としては、模型実験の条件設定¹⁾や数値計算の安定性²⁾の把握を目的とした研究がある。しかし、同微分方程式により交互砂州の伝播速度を評価した前例は著者らの知る限りない。また、既往の交互砂州などの移動床水理の数理解析では、底面の変化は流れに比べて十分に緩やかとする、準定常の流れを仮定することが多い^{例えば2)}。しかし、移動床水理において準定常仮定が成立するか否かは不明であり、流れの非定常性を考慮した数理解析が望ましい。

そこで本研究では、まず、流れの非定常性を考慮した底面位 z の双曲型偏微分方程式を導出する。次に、同式における伝播速度式の交互砂州の発生と発達のそれぞれの過程における適用性について述べる。

2. 底面位の双曲型偏微分方程式の導出

本章では、交互砂州の伝播速度を理論的に算定するため、底面位 z に関する平面二次元の双曲型偏微分方程式を導出する。同式の導出には、掃流砂のみを考慮した式(1)の Exner 式、流砂関数の Meyer-Peter and Müller 式(以下、M.P.M 式)、水面形方程式を用いる。また、掃流砂量の成分分解(式(2)、式(3))については、掃流砂量の縦断方向および横断方向の成分が流速成分と一致すると仮定した。水面形方程式は著者が新たに構築した式(4)、(5)を用いる。また、無次元掃流力は、式(6)を用いた。

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{1-\lambda} \left(\frac{\partial q_{Bx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{By}}{\partial y} \right) = 0 \quad (1)$$

$$q_{Bx} = 8(\tau_* - \tau_{*c})^{3/2} \sqrt{sgd^3} \frac{u}{V} \quad (2)$$

$$q_{By} = 8(\tau_* - \tau_{*c})^{3/2} \sqrt{sgd^3} \frac{v}{V} \quad (3)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\frac{4}{9} \frac{v}{u} Fr_x^2 (I_{ey} - I_{by}) + \left(1 - \frac{4}{9} Fr_y^2\right) (I_{bx} - I_{ex})}{\left(1 - \frac{4}{9} Fr_y^2 - \frac{4}{9} Fr_x^2\right)} \quad (4)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\frac{4}{9} \frac{u}{v} Fr_y^2 (I_{ex} - I_{bx}) + \left(1 - \frac{4}{9} Fr_x^2\right) (I_{by} - I_{ey})}{\left(1 - \frac{4}{9} Fr_y^2 - \frac{4}{9} Fr_x^2\right)} \quad (5)$$

$$\tau_* = \frac{n^2 V^2}{sdh^{1/3}} \quad (6)$$

ここで、 z は底面位、 t は時間、 λ は河床空隙率、 q_{Bx} は縦断成分の掃流砂量、 x は縦断方向の距離、 q_{By} は横断成分の掃流砂量、 y は横断方向の距離、 τ_* は合成成分の無次元掃流力、 τ_{*c} は限界無次元掃流力、 s は砂粒子の水中比重、 g は重力加速度、 d は粒径、 n は粗度係数、 V は合成成分の流速、 h は水深、 $Fr_x = u/\sqrt{gh}$ は縦断方向のフルード数、 $Fr_y = v/\sqrt{gh}$ は横断方向のフルード数、 I_{ex} は縦断方向のエネルギー勾配、 I_{ey} は横断方向のエネルギー勾配、 $I_{bx} = -\partial z/\partial x$ は縦断方向の河床勾配、 $I_{by} = -\partial z/\partial y$ は横断方向の河床勾配である。

紙面の都合上、導出の詳細は省略するが、式(1)中の $\partial q_{Bx}/\partial x$ と $\partial q_{By}/\partial y$ について合成関数の微分法則を適用し、整理すると以下の方程式が導出される。

$$\frac{\partial z}{\partial t} + M_x \frac{\partial z}{\partial x} + M_y \frac{\partial z}{\partial y} + M_x I_{ex} + M_y I_{ey} = 0 \quad (7)$$

上式のうち、 M_x と M_y は交互砂州の縦断方向と横断方向の伝播速度である。 M_x と M_y から、伝播速度の支配物理量は I_e 、 F_r 、 τ_* であることがわかる。

$$M_x = \frac{\left\{ 12(\tau_* - \tau_{*c})^{1/2} \sqrt{sgd^3} \left(\frac{u}{V} \right) \right\} I_e \left(1 - \frac{4}{9} Fr_y^2 \right)}{3sd(1-\lambda) \left\{ 1 - \frac{4}{9} (Fr_x^2 + Fr_y^2) \right\}} - \frac{\left\{ 12(\tau_* - \tau_{*c})^{1/2} \sqrt{sgd^3} \left(\frac{v}{V} \right) \right\} I_e \left(\frac{4}{9} \frac{u}{v} Fr_y^2 \right)}{3sd(1-\lambda) \left\{ 1 - \frac{4}{9} (Fr_x^2 + Fr_y^2) \right\}} \quad (8)$$

$$M_y = \frac{\left\{ 12(\tau_* - \tau_{*c})^{1/2} \sqrt{sgd^3} \left(\frac{v}{V} \right) \right\} I_e \left(1 - \frac{4}{9} Fr_x^2 \right)}{3sd(1-\lambda) \left\{ 1 - \frac{4}{9} (Fr_x^2 + Fr_y^2) \right\}} - \frac{\left\{ 12(\tau_* - \tau_{*c})^{1/2} \sqrt{sgd^3} \left(\frac{u}{V} \right) \right\} I_e \left(\frac{4}{9} \frac{v}{u} Fr_x^2 \right)}{3sd(1-\lambda) \left\{ 1 - \frac{4}{9} (Fr_x^2 + Fr_y^2) \right\}} \quad (9)$$

3. 模型実験の概要

前章で導出した底面位 z の双曲型偏微分方程式における伝播速度式の適用性を調べるため、模型実験を実施した。模型実験に用いた水路は、全長 12.0 m、流路幅 0.45 m、水路勾配 1/160 の直線矩形断面水路である。上流端から 2.0 m の助走区間を設け、そこから下流側へ 8.0 m の区間に平均粒径 0.76 mm の 4 号珪砂を 5cm の厚さで

Key Words: 交互砂州、伝播速度、双曲型偏微分方程式

〒950-2181 新潟市西区五十嵐 2 の町 8050 TEL 025-262-7053

(本稿は中止となった第 23 回応用力学シンポジウムの概要原稿に若干の加減を加えたものである)

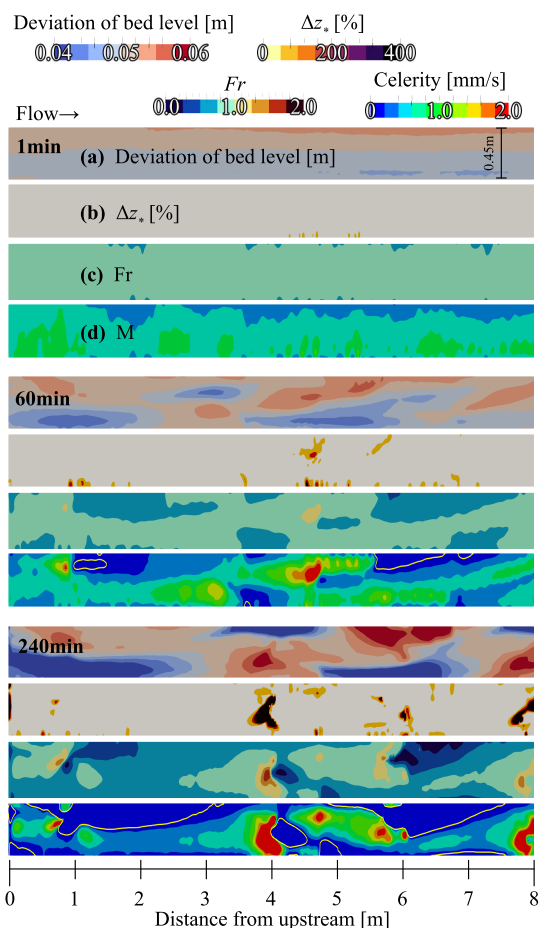


図-1 (a) Bed shape, (b) Δz_* , (c) Fr , (d) M

均一に敷き詰め、これを初期河床とした。水理条件は交互砂州の発生を狙い、黒木・岸³⁾の中規模河床形態の領域区分を参考に交互砂州の発生領域に設定した。この時の流量は1.5 L/s, $BI_0^{0.2}/h_0$ は13.5, 無次元掃流力は0.06, 給砂条件は無給砂で行った。通水時間は交互砂州が発達し、伝播と形状変化が緩慢となることを確認した4時間まで行った。通水中は、水面と底面の同時かつ高分解能な測定ができるStream Tomography(以下, ST)を用い、1分間隔で水面と底面の形状を2cmの空間分解能で計測した。STの詳細は別報⁴⁾を参照されたい。

4. 実測値に基づいた伝播速度式の適用性の検証

本章では、伝播速度式の適用性を調べるため、式(7)の双曲型偏微分方程式に着目し、河床変動量の実測値と同理論式から推定した河床変動量の計算値を比較する。同理論式を用いた河床変動量の推定には、水理解析より得られた水理量をもとに計算した。この水理解析はiRIC⁵⁾に同梱されるNays2Dを用い、STで計測した底面起伏上における固定床水理解析を行った。計算点の配置間隔は縦横断方向ともに2cm, 上流端境界条件は流量1.5 L/s, 下流端境界条件は実測水深とした。粗度係数はマニングストリクラー式から得られる0.015とした。

図-1に(a)底面形状、(b)河床変動量の実測値に対する計算値の差分を粒径で除した無次元量(以下, Δz_*), (c)フルード数(以下, Fr), (d)伝播速度(以下, M)の

各平面コンターを示す。また、河床変動量の実測値は1分間隔で計測した前後の底面高を差分し、河床変動量の計算値は式(7)を用いて算出した。

交互砂州の発生と発達の高々における伝播速度式の適用性は、図-1(b)を見ると、発生と発達の過程ごとに Δz_* が異なる、つまり、伝播速度の推定精度が異なることが分かる。まず、通水開始1分に注目すると、底面起伏は初期平坦床とほぼ変化はないため、河床変動量が小さく、 Δz_* は100%以内の精度で推定できている。また、交互砂州の形成が確認できた通水開始60分でも1分時点と同様の傾向である。一方で、最終時刻の240分に注目すると、交互砂州の堆積域の一部分において Δz_* が400%を超える領域が発生し、適用性の局所的な低下が認められる。

上述した堆積域における適用性の低下要因について、導出した伝播速度式と模型実験の結果の両面から考察する。まず、式(8)と式(9)を理論的に考察する。同式中の分母の一部は $1 - 4/9(Fr_x^2 + Fr_y^2)$ となり、 Fr が1.5になると、 M は無限大に発散する式形である。つぎに、実測値に基づき、 z の伝播速度が Fr が1.5に漸近するときに無限大に発散する物理的な可能性について考察する。図-1中の240分の(b)(c)(d)を見比べると、 Fr が1.0を越える領域で z の伝播速度は急増しているが、その領域での Δz_* は大きいため、少なくとも実施した模型実験における Fr が1.0を越える領域での z の伝播速度の急増は物理的に考えにくい。これらを踏まえると、導出した伝播速度式は、 Fr が1.0を越えると伝播速度が急増する数学的な性質を持ち、同式の適用性は急激に低下することが推測される。

最後に、伝播速度の時空間変化に着目すると、図-1中の平坦床1分から最終時刻240分までの(d)を見比べた際、平坦床から交互砂州の発生・発達過程において伝播速度が幅広い空間分布を持つことがわかった。

5. 結論

本研究では、底面位の双曲型偏微分方程式を導出し、同式中の伝播速度式の適用性を調べた。その結果、交互砂州の発生から発達のそれぞれの過程における伝播速度について幅広く推定できることが分かった。ただし、フルード数が1.0を越え1.5に近づくほどその適用性が急激に低下することが示唆された。また、同式により交互砂州の伝播速度が発生・発達過程において幅広い空間分布を持つことを明らかにした。

参考文献

- 1) 藤田裕一郎, 小池剛, 古川隆司, 村本嘉雄, 交互砂州の発生過程に関する二, 三の実験, 京都大学防災研究年報, 第28号B-2, 1986.
- 2) 黒木幹男, 岸力, 清水康行, 河床変動の数値計算法に関する研究, 第17回自然災害科学総合シンポジウム, pp.175-178, 1980.
- 3) 黒木幹男, 岸力: 中規模河床形態の領域区分に関する理論的研究, 土木学会論文報告集, No. 342, pp.87-96, 1984.
- 4) 星野剛, 安田浩保, 倉橋将幸, 交互砂州の形成機構の解明に向けた水面と底面の同時計測手法の開発, 土木学会論文集 A2(応用力学), 74巻1号, pp.63-74, 2018.
- 5) 北海道河川財団, <http://i-ric.org>.