高濃度固体粒子含有サージ流の流速分布計測における粒子画像流速計測法の適用に関する検討

名城大学　正会員　新井宗之

1. はじめに

間欠性土石流に代表される固体粒子を高濃度に含有した間欠性サージの流動モデルの検討のための流速分布測定のための検討である．ここでは，粒子画像流速計測 (PIV) による流速ベクトルの解析について検討するもので，解析の基となる相関性を評価する方法はいくつもあるため，対象とする流れについて標本相関係数を含め 5 つの方法で解析しどのような解析法が適切なのか検討するものである．

2. サージ流下実験概要

実験水路は，全長 56m，幅 10cm，深さ 15cm，水路勾配 $\theta = 2.5$deg の直線水路である. 水路は透明硬質アクリル製で，水路床は硬質アクリルで滑面ある．水路への給水は，水路上流端にマリオット瓶の原理を応用した半密閉型の 0.500m^3 水槽容器から水と粒子の混合物を一定流量として供給するものである．流下平均流量は，水路下流端から流出した容積を水路上流端から供給した時間 (T=120.7sec) で除した値として，$Q = 975.3$cm^3 である．含有した固体粒子は，ポリスチレン粒子で粒子密度は $\sigma = 1.04$g/cm^3，楕円柱の形状で代表粒径 $d = 3.1$mm である．流動中の固体粒子の平均容積濃度は，$C = 0.458$ である．この濃度は，水路下流端から流出した全容積について，水と固体粒子を分離し，それぞれの容積を測定した結果より得た値である．

サージ流下の画像は，水路下流端から上流へ 1m，水路上流端から下流へ 55m の位置で水路側面より動画として記録し，実験後解析に供した．画像の大きさは 720 × 480 ピクセルで解像度は流下方向 (x 方向)$\Delta x = 0.0080427$cm/pixcel，水深方向 (y 方向)$\Delta x = 0.0092166$cm/pixcel である．また，画像の時間間隔は $\Delta t = 0.0020833$sec(480fps) である．したがって，速度の最小単位は x 方向，y 方向，それぞれ，$\Delta u = \Delta x/\Delta t = 3.86$cm/s，$\Delta v = \Delta y/\Delta t = 4.42$cm/s である．

3. 流速解析法と解析結果および考察

上記で述べた実験を対象にした解析において，試行錯誤的に決めた相関領域 (テンプレート) の大きさは 31 × 31 ピクセルでほぼ実験粒子の代表粒径に相当する．探査領域の大きさは元画像の相関領域の流下方向へ 45 × 25 ピクセルの大きさである．また，解析の対象とする実験画像は流下サージ流の最先端から３番目のサージの先端部分である．

２つのデータ列の類似度を表す指標には多くの方法があるが，その中で次の５つについて検討する．

1) 標本相関係数 (ピアソンの積率相関係数)

2 組の数値からなるデータ列 $\{(x_i, y_i)\}\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ が与えられたとき，標本共分散 s_{xy}，標本標準偏差を s_x，s_y とし，データ $x = \{x_i\}$，$y = \{y_i\}$ の相加平均を $\bar{x}$，$\bar{y}$ とすると，標本相関係数 (sample correlation coefficient) は

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x\, s_y} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2} \tag{1}$$

で定義される．この相関係数はピアソンの積率相関係数ともいう．通常，相関係数と呼ばれる指標はこの関係を表している．r は $-1 \leq r \leq 1$ の範囲の値を取り $r = 1$ のとき最も高い相関があり $\{x_i\}$ と $\{y_i\}$ は同一である．$r = -1$ で逆の関係を示し，$r = 0$ では無相関を示す．しかしこの相関係数は $\{x_i\}$ と $\{y_i\}$ に線形の関係を前提としている．線形関係でない場合は適切に表すことができない．**図-1**(1) ピアソンの積率相関係数は先に述べたようにサージ先端部を水路側面より得た画像を式 (1) による解析結果である．画像右側の数値は cm の値を示していて，白色の部分が流体部分であり，画像の右端で水深が 2.1cm 程度であることを示している．図中の矢印は相関領域の移動ベクトルを示している．画像の上端に 100cm/s の大きさを示していて，解析結果の多くのベクトルの大きさは 100cm/s 前後である．この結果を見ると異常と思われるベクトルが複数見られる．この粒子画像流速計測法では，この異常ベクトルは必然的にもたらされると考えられる．見掛け上異常ベクトルを発生しない工夫が検討され実用化されているが，ここでは解析結果そのものを表示している．

2) ユークリッド距離

ユークリッド距離は，２つのデータ（標本）p, q を多次元のベクトルと考え，その p から q へのベクトルの大きさを類似度とする方法である．p，q をそれぞれ n 次元のベクトル $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}$ とするとその差のベクトル $\boldsymbol{r}$ は，$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}$ または $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}$ で $\boldsymbol{r}$ の大きさ $\|\boldsymbol{r}\|$ を $d(p, q)$ とすると $d(p, q)$ は

$$d(p, q) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + \cdots + (q_n - p_n)^2} \tag{2}$$

であり，これを相関性の指標とするものである．$\boldsymbol{r}$ の大きさは $\|\boldsymbol{r}\| \geq 0$ の値をとり，$\|\boldsymbol{r}\| = 0$ の場合，p と q が同じであることを意味する．ピアソンの積率相関係数は，p, q が線形の関係を仮定するが，ユークリッド距離は，p, q の対応するそれぞれの要素の距離だけがその相関性を決めるもので p, q に線形の関係を仮定しない．また，p, q の平均値をそれぞれ p_m, q_m，標準偏差をそれぞれ σ_p, σ_q とすると，p, q の標準化の値 p', q' は，$p' = (p_i - p_m)/\sigma_p$，$q' = (q_i - q_m)/\sigma_q$ である．p' から q' へのベクトル r' の大きさを標準化ユークリッド距離という．

Keyword : 土砂流サージ，流速分布，PIV，相関係数，解析
〒 468-8502 愛知県名古屋市天白区塩釜口 1-501 Tel: 052-838-2364

図-1(2) は標準化ユークリッド距離で解析した結果である．ピアソンの積率相関係数による解析結果と大きな差はない．

3) コサイン類似度

前項のようにデータ列（標本）x, y は多次元のベクトルと考えることができる．ここで，$\cos\theta$ をベクトル x, y のなす角とすると内積は，$x \cdot y = |x|\,|y| \cos\theta$ と定義される．これより，x, y を n 次元のベクトルとすると $\cos\theta$ は

$$\cos\theta = \frac{x \cdot y}{|x|\,|y|} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2} \qquad (3)$$

である．

この $\cos\theta$ をコサイン類似度という．x と y が同じ場合は $\cos\theta = 1$ となり，類似性がない場合は $\cos\theta = 0$ となる．$\cos\theta = -1$ は，x と y が逆の相関の場合である．$-1 \leq \cos\theta \leq 1$ の値をとり，θ は $\theta = 0 \sim \pi$ である．ピアソンの積率相関係数の式 (1) において $\{(x_i, y_i)\}$ を標準化データとすると式 (3) と同じになる．

図-1(3) はコサイン類似度で解析した結果である．ユークリッド距離による解析結果と大きな差はない．

4) ケンドール順位相関係数

順位データ $x = (x_1, \cdots, x_n)$ と $y = (y_1, \cdots, y_n)$ とのケンドール順位相関係数 τ は次で定義される．

$$\tau = (K - L) \Big/ \binom{n}{2} \qquad (4)$$

ここに，$K = \sharp\left\{\{i, j\} \in \binom{[n]}{2} \,\middle|\, x_i \lessgtr x_j, y_i \lessgtr y_j\right\}$,

$$L = \sharp\left\{\{i, j\} \in \binom{[n]}{2} \,\middle|\, \neg\left(x_i \lessgtr x_j, y_i \lessgtr y_j\right)\right\}.$$

ここで，K（または L）は n 項目からなる 2 項目を選んだときに順位関係が一致（または不一致）する組の数である．τ の分母は二項係数である．$\sharp$ は元の個数（濃度）を表す．また，$[n] : \{1, \cdots, n\}$ であり，集合 X と自然数 k に対して $\binom{X}{k}$ は X の k 個の元からなる部分集合全体を表す．$\lessgtr$ は $<$ または $>$ を表し（複号同順），$\neg$ は否定を表す．

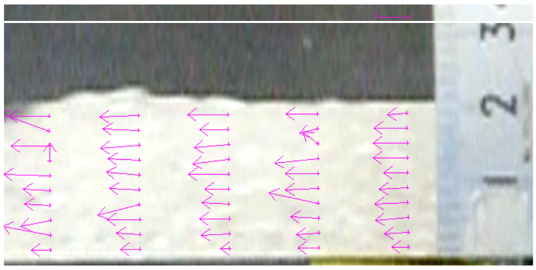
図-1(4) はケンドール順位相関係数で解析した結果である．ここで対象とする画像データでは，あまり適切な方法とは言えないようである．

5) スピアマンの順位相関係数

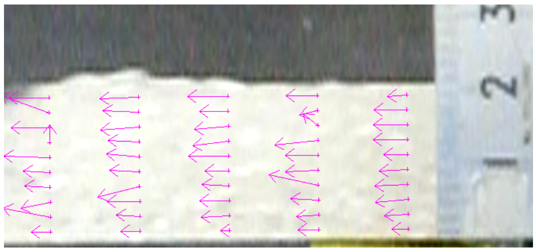
スピアマン (Charles Spearman) の順位相関係数は，ケンドールの順位相関係数と異なり，順位データをピアソンの積率相関係数として求めるものである．ピアソンの積率相関係数の特別な場合に当たる．スピアマンの順位相関係数は，次式のように表される．

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} = 1 - \frac{6}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \qquad (5)$$

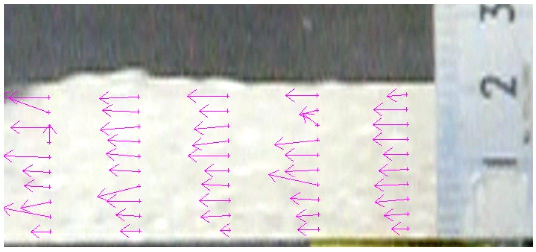
図-1(5) はスピアマンの順位相関係数で解析した結果である．他の解析結果と比べこの画像における解析では異常ベクトルが少ないようである．



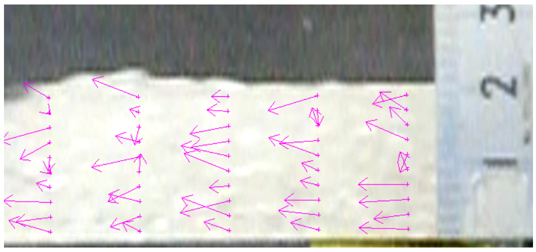
(1) ピアソンの積率相関係数



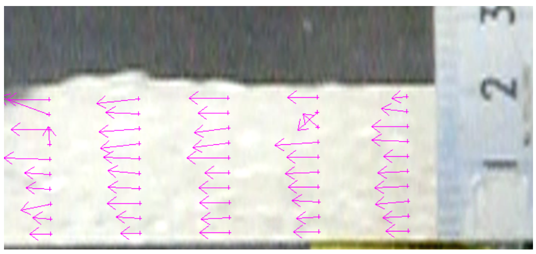
(2) 標準化ユークリッド距離



(3) コサイン類似度



(4) ケンドール順位相関係数



(5) スピアマンの順位相関係数

図-1 解析ベクトル図

4. まとめ

それぞれ考え方の異なる類似度の解析を，ここで対象とするサージ流について適用した．異常ベクトルの発生の面からみるとケンドール順位相関係数法以外の方法は同じような結果となった．その中でスピアマンの順位相関係数による結果の異常ベクトルが少ないようである．

謝辞　：この実験は京都大学防災研究所宇治川オープンラボラトリーで行った．ここに記して関係各位に深甚の謝意を表します．