粒子法および個別要素法の連成による
複雑なダムブレイク解析

群馬大学　大学院理工学府　学生会員　○井上　拓海
群馬大学　大学院理工学府　　正会員　　斎藤　隆泰

1.　はじめに

近年, 台風等の異常気象による河川の増水に伴い, ダムの越流が生じている. これにより, ダム下流域の砂の運搬による河床低下や, 洗堀防止用の床止めの破壊問題が発生している. また, それらの対策としての維持管理も明確な基準がなく, 越流前における被害予測が困難となっている. そのため, 護床工の健全性を検討するため, 越流した水と砂の挙動を明らかにし, それらが河川横断構造物にどのように作用するのかを検討する必要がある. 近年では, 液相に大変形問題を容易に取り扱える粒子法を適用し, 固相には粒子群を離散体として解析できる個別要素法 (DEM:Discrete Element Method) を用いた DEM-MPS 法が開発され, 固液混相流の解析が可能になりつつある. そのため, DEM-MPS 法は今後, 河川流況の数値解析を行う上で, 重要な解析ツールとなり得る可能性を秘めている. 本研究では, 粒子法の一種であり, 圧力に関して陽的に解く E-MPS(Explicit Moving Particle Simulation) 法と, DEM を連成させ, 水と砂が混在するダムブレイク問題の数値解析を行い, 水理実験と比較することで本研究における連成解析手法の妥当性を示す.

2.　粒子法の定式化

粒子法は, 流体のような連続体の運動を粒子群として離散化近似する計算手法である. そのため, これまで用いられてきた境界要素法や有限要素法と比較して, メッシュの生成が必要なく, 大変形問題を容易に取り扱うことができる. また本研究では, 粒子法として, 圧力に関して陽的に解く E-MPS 法を適用し, 土と連成させるために, 支配方程式について, 局所体積平均法に基づいた次の連続の式とナビエ-ストークス方程式を用いる.

$$\frac{D(\varepsilon\rho)}{Dt} + \varepsilon\rho\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\nabla^2\boldsymbol{u} + \boldsymbol{g} + \frac{1}{\varepsilon\rho}\boldsymbol{f} \tag{2}$$

ここで $\rho, t, \boldsymbol{u}, P, \nu$ および $\boldsymbol{g}$ はそれぞれ, 密度, 時間, 流速, 圧力, 動粘性係数および重力加速度である. また ε は流体の体積分率であり, 図 1(a) の影響領域内に存在する流体粒子の存在割合を表す. E-MPS 法では, 式 (2) の右辺第一項, 第二項に含まれる勾配 ∇ やラプラシアン ∇^2 を, 図 1(a) のような粒子間相互作用モデルとして次のように離散化する.

$$\langle\nabla P\rangle_i = \frac{d}{n^0_{\mathrm{grad}}}\sum_{j\neq i}\left[\frac{(P_j+P_i)(\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i|^2}w_{\mathrm{grad}}(|\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i|)\right] \tag{3}$$

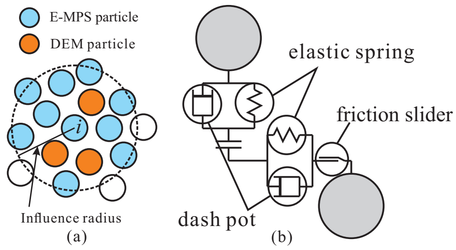


図 1 DEM-E-MPS 法での計算モデル (a) 影響半径と粒子間相互作用モデル (b) フォークト (Voigt) モデル

$$\langle\nabla^2\boldsymbol{u}\rangle_i = \frac{2d}{\lambda^0 n^0}\sum_{j\neq i}[(\boldsymbol{u}_j-\boldsymbol{u}_i)w(|\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i|)] \tag{4}$$

ここで $d, \boldsymbol{r}, n^0, w(|\boldsymbol{r}|), \lambda^0$ は, それぞれ空間次元数, 粒子座標, 基準粒子数密度, 重み関数, 基準状態における粒子間距離の重み付き二乗平均である. また右下の添え字 i, j はそれぞれ i, j 番目の粒子のパラメータである. 固液混相流の数値解析では, 固相が液相を排除するために, 粒子数密度 N_i を次のように設定する.

$$\frac{N_i}{n_0} = \frac{\rho_i}{\rho_0}\quad ,\quad N_i = n_i + (1-\varepsilon_i)\,n_0 \tag{5}$$

式 (3) の圧力 P の計算に関して, 微小な圧縮を許容するので, 次の粒子数密度の関数を用いる.

$$P_i = \frac{\rho_0 c^2}{7.0}\left[\left(\frac{N_i}{n_0}\right)^{7.0} - 1\right]\qquad (n \geq \varepsilon n_0) \tag{6}$$

ここで c は流体中の音速である. また式 (2) 右辺第四項は固相-液相間運動量交換項となっており, 次節で後述するが, $\boldsymbol{f}$ は両相間運動量がつり合うように定義する.

3.　個別要素法の定式化

個別要素法では, 個々の粒子に関して, 次の並進・回転の運動方程式を用いる.

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F}_c + \boldsymbol{F}_{\mathrm{g}} + \boldsymbol{F}_f + \boldsymbol{F}_p \tag{7}$$

$$\boldsymbol{I}\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{T} \tag{8}$$

ここで $m, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{F}_c, \boldsymbol{F}_{\mathrm{g}}, \boldsymbol{F}_f, \boldsymbol{F}_p, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{\omega}$ および $\boldsymbol{T}$ はそれぞれ, 質量, 速度, 接触力, 重力による外力, 抗力, 圧力による外力, 慣性モーメント, 角速度, トルクである. DEM では, 衝突粒子間で法線方向, 接線方向それぞれについて接触モデルを用い, それらのモデルを組み合わせたフォークト (Voigt) モデル (図 1(b)) を用いることで計算を行う. フォークトモデルは粘弾性体の性質を表現しており, 弾性バネは弾性力を, ダッシュポットは粘性抗力を表す. また, 摩擦スライダーは, 所定の力が作用すると滑動するジョイントとなっている.

Key Words: E − MPS 法, 個別要素法 (DEM), 局所体積平均, ダムブレイク
〒 376-8515　群馬県桐生市天神町 1-5-1

粒子間の接触力は, 接触面に沿った局所座標系で法線方向, 接線方向の接触力成分をそれぞれ計算し, 各成分を全体座標系に変換することで求められる. したがって, 次式の座標変換行列 $\boldsymbol{R}$ を用いて接触力 $\boldsymbol{f}$ を求める.

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{f}^L ; \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_n \\ f_s \end{pmatrix} \tag{9}$$

ここで θ は全体座標系から局所座標系への回転角を表す. また下添え字 x, y および n, s はそれぞれ全体座標系での x, y 軸および接触面での法線, 接線方向を表す. 局所座標系での接触力成分は次のように求められる.

$$\begin{pmatrix} f_n \\ f_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_n & 0 \\ 0 & k_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_n \\ \delta_s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_n & 0 \\ 0 & c_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\delta}_n \\ \dot{\delta}_s \end{pmatrix} \tag{10}$$

ここで k, c, δ はそれぞれバネ定数, 粘性定数, 弾性バネの変位である. フォークトモデルでは, 接線方向に滑動するジョイントが配している. したがって, 文献 [1] を参考に, 接線方向について, 次のような条件を定める.

$$f_s^{abs} = \min\{|f_s|, |f_n \tan\phi_\mu|\} \quad ; \quad f_s = \mathrm{sgn}\{f_s\} f_s^{abs} \tag{11}$$

ここで ϕ_μ は粒子間の摩擦角である. また粒子 i に対する x, y 方向の作用力を F_x, F_y, 二次元問題では回転は z 軸周りのみ扱えばよいので, トルクを T_z とすると,

$$\boldsymbol{F}_c = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{f}_x^j \quad ; \quad \left[F_d\right] = \left[\sum_{j=1}^{N} f_d^j\right] \quad (d = x, y) \tag{12}$$

$$\boldsymbol{T} = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{l}^j \times \boldsymbol{f}^j \quad ; \quad T_z = \sum_{j=1}^{N} \left(l_x^j f_y^j - l_y^j f_x^j\right) \tag{13}$$

ここで N は i 粒子に対する接触粒子数であり, $\boldsymbol{l}^j$ は i 粒子中心から j 粒子との接触点へのベクトルである. 式 (7) の右辺第三項, 第四項は液相より受ける相互作用項であり, $\boldsymbol{F}_p$ は前節の式 (3),(5),(6) と同様に計算し, $\boldsymbol{F}_f$ は,

$$\boldsymbol{F}_f = \frac{\beta}{1-\varepsilon}\left(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\right) V_s \tag{14}$$

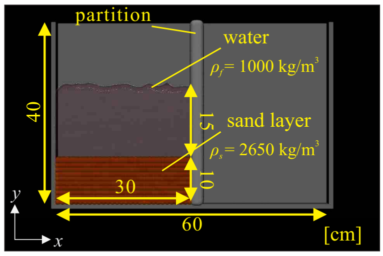
となる. ここで $\beta, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ および V_s はそれぞれ運動量交換係数, 周辺流体の速度, 固相粒子の速度および体積である. またこのときの $\boldsymbol{F}_f$ は, 流体が与えた力であるから, 固相粒子の影響域内の n 個の流体粒子に対して, 相互作用として,

$$\boldsymbol{f} = -\frac{1}{n}\boldsymbol{F}_f \tag{15}$$

を分配して両相間の運動量を保存する. 以上の計算を行うことで流速ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 等を求めていく. 前項を含めた詳細については, 例えば文献 [2] を参照されたい.

4. 流体粒子と砂粒子の重なり

土と水の連成解析を行う上で, 流体粒子と砂粒子の重なりについて考える必要がある. 例えば, 乾燥砂に水を落下させた時, 浸透するため, 砂と水の重なりを考慮する必要がある. しかし, 河床での現象を考えると, 河床は飽和した状態であり, 流体粒子が砂粒子を押し返すような工夫が必要である. 以下では紙面の都合上, 前者に対する解析結果を示す.



$\Delta t = 2.0 \times 10^{-5}$ s
particle diameter = 1.0 cm
water parameter
Influence radius = 2.1 cm
Sonic = 15.0 m
sand parameter
k_n =1.28 $\times 10^7$ N/m
k_s =4.93 $\times 10^6$ N/m
c_n =2.31 $\times 10^3$ Ns/m
c_s =1.43 $\times 10^3$ Ns/m
ϕ_μ =30.0

図 2 土・水から成るダムブレイク問題の解析モデル　※寸法の単位は (cm)

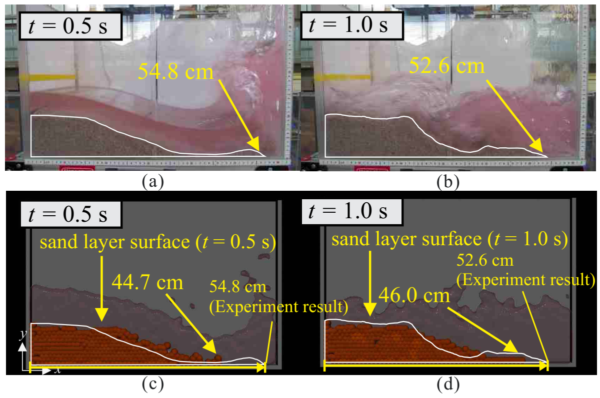


図 3 土・水から成るダムブレイク問題に対する実験結果 (a)t = 0.5s(b)t = 1.0s と解析結果 (c)t = 0.5s(d)t = 1.0s の比較

5. 数値解析例

図 2 に示すような土と水の二次元ダムブレイク問題を解析する. 流体粒子と砂粒子のパラメータは図 2 右に示すとおりである. まず, 初期状態を設定するために, 水槽上方から流体を落下させ, 定常状態になった時の水深が実験での水深と一致するように落下高さを設定する. 流体と砂が混ざり, 定常状態となったところで, 中央に設置された仕切りを鉛直上向きに 1.0m/s で引上げる (t = 0s). 図 3 に水理実験の結果と解析結果を示す. 図 3 の各結果には, 水平方向について水槽左端を基準として最大距離にある砂の位置と, 実験での各時間における砂面形状を白線で記載した. これらを比較すると, 概ね等しい砂面形状が取れていることが見て取れる. また, 実験に比べて解析では砂粒子の動きが鈍くなっているが, 粒径が大きいことが砂の動きを妨げたと考えられる. 本研究で開発した DEM-E-MPS 法により土・水から成るダムブレイク問題を解くことができたと言える.

6. まとめ

本研究では, DEM と E-MPS 法の連成解析手法を開発し, 土・水から成るダムブレイク問題を解析することで, 開発手法の妥当性を示した. 今後は流体の流入問題や剛体を含めた場合の解析や粒子の重なりを考慮しない場合についても検討する予定である.

参考文献

1) Chatherine O'Sullivan 著, 鈴木輝一訳 : 粒子個別要素法, 森北出版株式会社, 2014.
2) 太田光弘, 酒井幹雄ら : 混相流の数値シミュレーション, 丸善出版株式会社, 2015.