

物理モデルと統計モデルを融合した 開水路のエネルギー勾配の推定法の開発

新潟大学大学院自然科学研究科 学生会員○茂木 大知
新潟大学災害・復興科学研究所 正会員 安田 浩保
東北大学大学院工学研究科 正会員 大竹 雄

1. はじめに

開水路の数理モデルを用いた水位と流速の正確な算定は、流れのエネルギー勾配 (以下, I_e) を適正に評価した上で初めて可能になる。また、流水による底面の土砂の輸送量の算定においても I_e は支配的な役割を果たす。 I_e の正確な見積もりには、空間分布をもつ流速 $v(x)$ と水深 $h(x)$ の一対の測定が必要となる。しかし、自然河川や実験水路でのそのような測定手法は未確立である。そのため、流速と水深が空間分布を持つ不等流のエネルギー勾配 $I_{eN}(x)$ の算定でさえ、流速と水深が空間分布を持たない等流の流速公式から導いた等流のエネルギー勾配 I_{eU} の代用が一般的である。この時、Manning の粗度係数 n は、底面を構成する材料由来の定数として与えられる。

著者らの研究グループでは、模型実験による等流と不等流の I_e の比較¹⁾²⁾を行い、不等流における I_e は、 $v(x)$ と $h(x)$ に依存した空間分布を有し、定数とならないことを実証している。また、彼らは $v(x)$ と $h(x)$ が空間分布を持つ不等流の $I_{eN}(x)$ は I_{eU} と 20 % 以上も異なる場合があり、その乖離量は水理量と土砂輸送量のどちらの算定にあたってでも無視できない規模であることを示した。

前述の通り、常用される水理の数理モデルを用いた $I_{eN}(x)$ の算定や予測にあたっては、 $v(x)$ と $h(x)$ が既知であることが数学的に要請される。しかし、現行の実河川の観測は疎らなうえ $v(x)$ と $h(x)$ を同時に観測する技術も未確立のために、 $I_{eN}(x)$ の適正な算定はできない。合理的な水理の解は、 $I_{eN}(x)$ の空間分布が推定された上で水理の支配方程式の計算を行うことでのみ得られる。そこで、本研究では、従来のモデル駆動とデータ駆動を組み合わせ、言わば順解析と逆解析が融合した新たな水理の解法によって $I_{eN}(x)$ の推定を試みる。以下の解析では、一般に用いられている等流における Manning 型の摩擦損失モデルを不等流における様々なエネルギー損失を包括した総損失モデルの第 1 次近似とした上で、 n の概念を空間の関数へと拡張し、これが空間的に変化することで不等流における $I_{eN}(x)$ を記述できるものと仮定する。つまり、逆解析によって同定するパラメータは、 n の形で与えられる空間分布を持つエネルギー総損失係数 (以下, $n'(x)$) となる。本研究では、 $I_{eN}(x)$ を推定する基礎的研究として、1 次元の不等流に $n'(x)$ の空間分布を与え、それを逆解析によって推定することを試行した。

2. 水理計算に向けた水理モデルと統計モデル

(1) 常用されている水理モデル (順解析)

一般的に用いられる等流を仮定した底面での摩擦損失モデルと不等流の水理モデルは、以下の式の通りである。

$$I_{eU}^{\frac{1}{2}} = \frac{v}{h^{\frac{2}{3}}} n \quad (1)$$

$$v(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x} + g \frac{\partial h(x)}{\partial x} = -g \frac{n^2 v(x)^2}{h(x)^{\frac{4}{3}}} \quad (2)$$

ここで、 g は重力加速度である。式 (1) は、よく知られた Manning の等流の流速公式そのものである。また、式 (2) の右辺の損失項は、一般に $v(x)$ と $h(x)$ の空間分布を考慮するものの、 n は定数としているために底面の材料由来の摩擦損失の評価のみに留まる。

(2) 本研究が提案する統計モデル (逆解析)

本研究では、式 (1) を以下のように改め、不等流におけるエネルギー総損失モデルを以下のように記述する。

$$I_{eN}(x)^{\frac{1}{2}} = \frac{v(x)}{h(x)^{\frac{2}{3}}} n'(x) \quad (3)$$

上式の通り、 $I_{eN}(x)$ の $1/2$ 乗と $n'(x)$ の関係は線形関係であるため、式 (2) の数値解を差分法により得て、これらから構成される作用素ベクトルを作成した。そのうち、それらを構成要素とした作用素マトリックス (観測行列) $\mathbf{H}$ を作成し、両者を線形作用素で連結する。ここで、ある場所 i における $I_{eN}(i)$ の $1/2$ 乗を e_i とした時、 $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_m)^T \in \mathbf{R}^m$ 、 $\mathbf{n} = (n'_1, n'_2, \dots, n'_n)^T \in \mathbf{R}^n$ と置くと、次式が成り立つ。

$$\mathbf{e} = \mathbf{H}\mathbf{n} \quad (4)$$

実河川の観測事情を考慮すると、観測情報 $\mathbf{e}$ の次元を m 、未知量 $\mathbf{n}$ の次元を k とした時、 $m < k$ の劣決定問題となる。また、分野を問わず、一般的に観測には誤差が内在することが知られている。そこで本研究では、誤差が内在する観測情報から本質を推定可能なスパースモデリング³⁾の考え方を採用し、解くべき目的関数をラグランジュの未定乗数を用いて次式の通りとする。

$$\min_{\mathbf{n}} \left\{ \frac{1}{2\lambda} \|\mathbf{e} - \mathbf{H}\mathbf{n}\|_2^2 + \|\mathbf{D}\mathbf{n}\|_1 \right\} \quad (5)$$

ここで、 $\mathbf{D}$ はスパース性を期待する空間を決定する作用素、 $\|\cdot\|_i$ は l_i ノルムを表す。また、本研究において、 λ は 1.0×10^{-6} の定数としている。

Key Words: エネルギー勾配, スパースモデリング
〒950-2181 新潟市西区五十嵐 2 の町 8050 TEL 025-262-7053

(本稿は中止となった第23回応用力学シンポジウム概要の原稿に若干の加減を加えたものである)

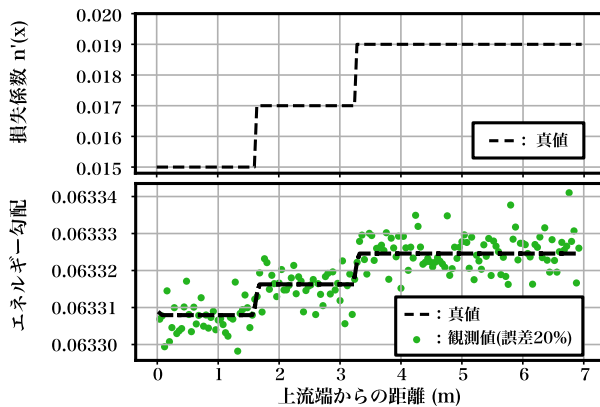
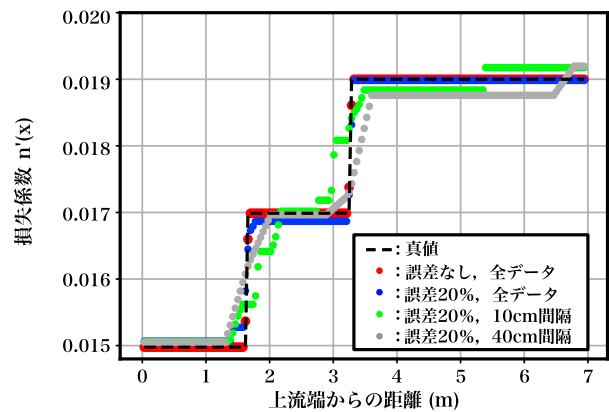
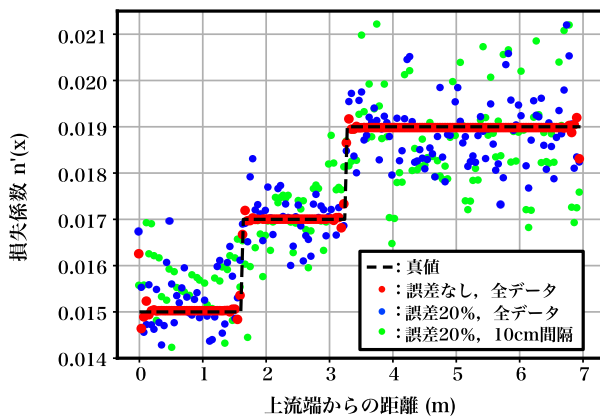


図-1 損失係数の真値と観測値の分布

図-3 n' の差分空間における推定結果図-2 n' 空間における推定結果

3. 数値解析における適用性の検証

(1) 解析条件

解析に際して設定した条件は、長さ7m、勾配1/250の1次元平坦固定床水路であり、底面粗度を $n'(x)$ の空間変化に見立て、上流端から一定距離ごとに0.015, 0.017, 0.019の3段階とした。図-1には、設定した損失係数の分布と、その条件において観測されるエネルギー勾配を真値と共に示す。本研究で観測情報へ与える誤差は正規誤差であり、著者らの研究グループで実施した模型実験において、観測された水位と、同条件を与えた2次元不等流解析によって算出された水位に最大20%程度の観測誤差が生じ得る結果¹⁾を反映したものである。また、本解析における観測行列 $\mathbf{H}$ は、 $n'(x)$ の単位変化あたりのエネルギー勾配を上記の条件から2.(1)で説明した順解析を用いて生成した。

(2) $n'(x)$ の空間を基にした逆推定

まず、式(5)に示す正則化項中の作用素 $\mathbf{D}$ を単位行列とし、 $n'(x)$ の空間分布にスパース性を期待した推定を行った。既知の観測情報は、適用性確認のため、1) 誤差なしかつ全てのデータ、2) 誤差ありかつ全てのデータ、3) 誤差ありかつ10cm間隔の3条件とした。

推定結果を図-2に示す。1)の結果から、誤差のない十分な数の観測があれば、ほぼ完全に $n'(x)$ の空間分布を再現できることが確認された。2)では、20%程度の誤差が介入すると、十分な観測数でも良好な推定は不可能となり、傾向程度の把握にとどまった。3)では、2)よ

りも増して推定精度が低下し、傾向の把握すら難しい。また、1)の場合ですら区間端部や変化点において推定が不安定となっており、 $\mathbf{D}$ を単位行列とした正則化項は適用性に問題を擁することがわかる。

(3) $n'(x)$ の差分空間を基にした逆推定

次に、 $\mathbf{D}$ を空間差分を行う形に変形して、 $n'(x)$ の空間分布を差分空間にスパース性を期待した推定を行った。観測情報は前節と同様の3条件に加え、さらに厳しい条件として4) 誤差ありかつ40cm間隔を設定した。

図-3に推定結果を示す。前節と同様に設定した条件の結果から、良好に $n'(x)$ の空間分布を推定できていることがわかる。また、観測に誤差が介在しても、十分な観測数があれば $n'(x)$ の値やその変化点も正確に推定できており、3) 10cm間隔、4) 40cm間隔と与える観測を間引いても、空間分布の変化点において精度は下がったものの、それぞれの値を再現できている様子から推定は十分に安定していると言える。実河川における観測はさらに疎らであることが予想されるが、正則化項の $\mathbf{D}$ を空間差分とすることで、効率的にその空間分布を推定できる可能性が示唆された。

4. おわりに

本論文では、開水路において観測が困難かつ数値モデルによる算定も困難な $I_{eN}(x)$ を推定するため、エネルギー総損失係数について線形を仮定したモデル化を行った。その上で、スパースモデリングを用いた損失係数の空間分布を逆推定する手法を提案し、簡易な条件を設定した数値解析から得た数値解における十分な適用性を示した。本手法は、実河川を想定した2次元への拡張や、より計測が容易な水理量(例えば水面勾配)に基づく推定法への拡張が期待できる。

参考文献

- 1) 齋藤選, 安田浩保, 早坂圭司: 交互砂州上の流れにおける摩擦損失の定量化, 第36回土木学会関東支部新潟会研究発表講演会論文集, pp.104-107, 2018
- 2) 黛由季, 安田浩保: 流砂関数を用いた不等流におけるエネルギー勾配の推定, 第23回応用力学シンポジウム概要集, 2020(投稿中)
- 3) R. Tibshirani (1996). Regression shrinkage and selection via the lasso. J. Royal. Statist. Soc. B., Vol. 58, No. 1, pp.267-288.