

## 熱注入によるゴムの損傷回復現象の数値シミュレーション

○東北大学大学院工学研究科 学生員 野崎 陽明  
 東北大学大学院工学研究科 正 員 山田 正太郎  
 東北大学大学院工学研究科 正 員 京谷 孝史  
 東北大学大学院工学研究科 正 員 松原 成志朗

## 1. はじめに

ゴム材料に対し、繰り返し負荷を与えると損傷に起因する Mullins 効果<sup>1)</sup>と称される履歴曲線が描かれる。また、ゴム材料は時間経過とともに損傷が回復する現象 (healing 現象) が生じることが知られている。さらに熱を与えることで損傷の回復が促進されるとの報告もある<sup>2)</sup>。そこで本研究では Mullins 効果を超弾性構成則と損傷理論により記述したモデル<sup>3)4)</sup>をベースに、熱注入による損傷回復現象をモデル化する。さらに、同モデルを組み込んだ有限変形理論に基づく有限要素解析コードを開発し、実際に数値シミュレーションを行う。

## 2. 材料モデル

本研究で対象とする純ゴムは、一般に体積変化しないことが知られている。よって非圧縮性を近似するための圧縮性超弾性モデルとしてひずみエネルギー関数  $\Psi(\mathbf{C})$  を等容変形成分  $\Psi(\widehat{\mathbf{C}})$  と体積変化成分  $U(J)$  に加算分解する。

$$\Psi(\mathbf{C}) = \Psi(\widehat{\mathbf{C}}) + U(J); \quad \widehat{\mathbf{C}} = (\det \mathbf{C})^{-1/3} \mathbf{C} \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{C}$  は右 Cauchy-Green-Tensor、 $J$  は変形勾配テンソル  $\mathbf{F}$  のヤコビアンである。

損傷が等容変形成分にのみ影響を与えていると仮定し、次式のようにエネルギー関数を再定義する。

$$\Psi(\widehat{\mathbf{C}}, J, \zeta) = (1 - \zeta)\Psi_0(\widehat{\mathbf{C}}) + U(J) \quad (2)$$

ここで、 $\Psi_0(\widehat{\mathbf{C}})$  は、無損傷状態におけるひずみエネルギー関数の等容変形成分である。 $\zeta$  は損傷変数であり、以下のように定義する。

$$\zeta = \zeta(\alpha) = \zeta_\infty [1 - \exp(-\alpha/t)] \quad (3)$$

$$\alpha(t) = \max_{s \in [0, t]} \widehat{\Psi}_0(s) \quad (4)$$

ここで、 $\zeta_\infty, t$  は材料定数である。 $\alpha$  は  $\mathbf{C}$  空間に描かれる損傷曲面の大きさを表しており、今までに受けたひずみの最大値を記憶する変数である。等容変形による接線係数  $\widehat{\mathbf{C}}$  を計算すれば、以下ようになる。

$$\widehat{\mathbf{C}} = \begin{cases} (1 - \zeta)\widehat{\mathbf{C}}_0 - \zeta'(\alpha)\mathbf{S}'_0 \otimes \mathbf{S}'_0 & \phi = 0 \text{ and } \dot{f} > 0 \\ (1 - \zeta)\widehat{\mathbf{C}}_0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5)$$

$$\widehat{\mathbf{C}}_0 = 4 \frac{\partial^2 \widehat{\Psi}_0}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \quad (6)$$

ここで、 $\mathbf{S}'_0$  は無損傷状態での等容変形に起因する second Piola-Kirchhoff 応力の偏差成分、 $\phi$  は損傷関数、 $f$  は損傷の発展を支配する熱力学による力を表し、それぞれ以下のように入力される。

$$\mathbf{S}'_0 = 2 \frac{\partial \widehat{\Psi}_0}{\partial \mathbf{C}} \quad (7)$$

$$f(\mathbf{C}) = \Psi_0(\widehat{\mathbf{C}}) \quad (8)$$

$$\phi(\mathbf{C}, \alpha) = f(\mathbf{C}) - \alpha \quad (9)$$

## 3. 損傷回復モデル

従来のモデルでは損傷が進展する。すなわち損傷曲面の大きさ  $\alpha$  が大きくなることしか考えられていないが、今回のモデルでは、損傷曲面の大きさ  $\alpha$  を熱注入によって小さくさせることで損傷回復させる。今回のモデルでは損傷曲面の発展則  $\dot{\alpha}$  以下のように定義する。

$$\dot{\alpha} = \begin{cases} \langle \dot{f} \rangle & \phi = 0 \\ -\dot{\lambda}(\alpha - f) \frac{\langle \Theta - \Theta_r \rangle}{\Theta_r} & \phi < 0 \end{cases} \quad (10)$$

ここで、 $\Theta$  は物質点における絶対温度、 $\dot{\lambda}$  は損傷回復速度を決めるパラメーター、 $\Theta_r$  は参照温度である。今回のモデルでは  $\Theta > \Theta_r$  のときに損傷の回復が生じる。また、物質点での温度が高く、 $\phi$  が大きいほど、損傷回復速度が大きいモデルとなっている。ただし、 $\phi > 0$  となるような回復は生じないことを注意する。なお、損傷の進展は従来のモデルと同様に生じる。

## 4. 数値解析例

次に上記モデルを用いた有限要素法による数値解析例を示す。1 次ののアイソパラメトリック要素を用いた有限要素法では、式(2)のように与えられるモデルを非圧縮に近い条件で用いるとき体積ロッキングが生じることが知られている。これを回避するために、本数値解析では圧力の自由度を追加した u-p 混合法を用いる。また温度変化を考慮するために全エネルギー汎関数  $\Pi(\phi, p, \Theta)$  を次式のように定義する。

$$\Pi(\phi, p, \Theta) = \Pi_L(\phi, p) - \int_V \frac{1}{2k} p^2 dV + \int_V \Psi^h(\Theta) dV \quad (11)$$

$$\Pi_L(\phi, p) = \widehat{\Pi}(\phi) + \int_V p(J-1) dV \quad (12)$$

$$\widehat{\Pi}(\phi) = \int_V \widehat{\Psi}(\mathbf{C}) dV - \int_V \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{x} dV - \int_A \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{x} dA \quad (13)$$

$$\Psi^h(\Theta) = \rho_0 c_0 \left\{ \Theta - \Theta_0 - \Theta \ln \frac{\Theta}{\Theta_0} \right\} \quad (14)$$

ここで、 $\mathbf{f}_0$  は物体力、 $\mathbf{t}_0$  は表面力、 $\rho_0$  は密度、 $c_0$  は比熱、 $\Theta_0$  は初期絶対温度であり、いずれも初期状態を参照する。以上定義したエネルギー汎関数より得られる以下の式を同時に満足する変位、圧力を求める。

$$\begin{cases} D^2\Pi[\delta v, \mathbf{u}] + D^2\Pi[\delta v, \Delta p] = -D\Pi[\delta v] \\ D^2\Pi[\delta p, \mathbf{u}] + D^2\Pi[\Delta p, \Delta p] = -D\Pi[\delta p] \end{cases} \quad (15)$$

ここで、 $\delta v$  は仮想変位速度、 $\mathbf{u}$  は修正変位、 $\delta p$  は仮想圧力、 $\Delta p$  は修正圧力である。以上から変位・圧力と熱弱連成解析を行う。

次に解析対象とするモデルと境界条件を図-1に示す。ゴム試験片の引張試験を想定した計1980個の立方体要素を用いた。

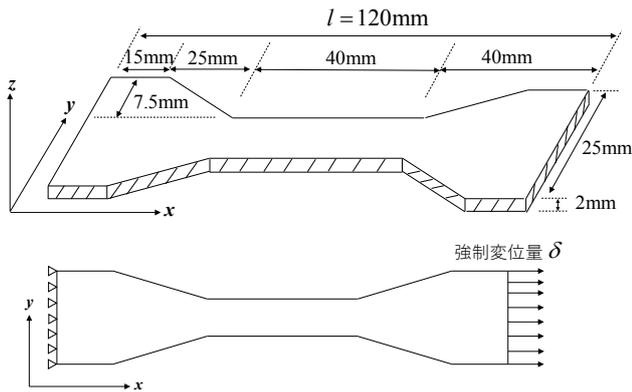


図-1 解析モデル

今回は、 $\Psi_0(\widehat{\mathbf{C}})$  を以下に示す圧縮性 neo-Hookean モデルのひずみエネルギー関数を用いた。

$$\Psi_0(\widehat{\mathbf{C}}) = \frac{1}{2} \mu (\text{tr}(\widehat{\mathbf{C}}) - 3) \quad (16)$$

強制変位を  $\delta = 120 \text{ mm}$  まで与えた後、 $\delta = 0 \text{ mm}$  まで戻す荷重を計3回繰り返した。3回目の荷重直前に3時間  $\Theta = 350 \text{ K}$  の温度を試験片表面上に一様に与えることで損傷の回復を促した。

解析対象を1つの要素とみなした上で軸応力  $\sigma$  と軸ひずみ  $\varepsilon$  を次式により算出した。

$$\sigma = \frac{F}{A_0} \quad (17)$$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{l_0} \quad (18)$$

ここで、 $F$  は解析モデル端部における  $x$  方向の節点力の和、 $A_0$  は初期の右端部の断面積、 $l_0$  は初期の試験片の長さ、 $\delta$

は強制変位量である。また解析に使用した材料定数を表-1にまとめる。

材料定数	値
せん断弾性係数 $\mu$	1.0 MPa
非圧縮性パラメーター $\kappa$	16 666.0 MPa
最大損傷度 $\zeta_\infty$	0.60
損傷飽和パラメーター $\iota$	2.0 J
参照温度 $\Theta_r$	313 K
損傷回復発展指数 $\lambda$	0.01 /hour

図-2には荷重時の挙動のみを示した。

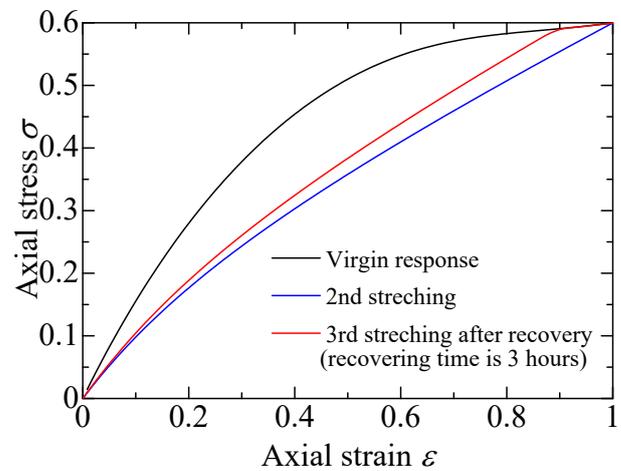


図-2 解析結果

2回目の荷重は初回の剛性を下回る剛性を示しながら除荷開始点まで戻っており、Mullins効果が再現されている。一方3回目の荷重では、温めて損傷の回復を促したことにより、剛性が回復している様子を見てとることができる。

## 5. 結論

本研究では、熱注入によるゴムの損傷回復モデルを構築した上でゴム試験片の損傷回復シミュレーションを行った。熱を注入することによって損傷の回復を再現することができた。今後は応用研究として、積極的な熱注入による免震ゴムの損傷回復を視野に研究を進めたい。

## 参考文献

- 1) Mullins, L.: Effect of stretching on the properties of rubber, *Journal of Rubber Research* **16**, 275-289. [1947]
- 2) Plagge, J., and Klüppel, M.: Mullins effect revisited: Relaxation, recovery and high-strain damage, *Materials Today Communications* **20**. [2019]
- 3) Simo, J. C.: On a fully three-dimensional finite-strain viscoelastic damage model; Formulation and computational aspects, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **60**, 153-173. [1987]
- 4) Holzapfel, G. A.: *Nonlinear Solid Mechanics, A Continuum Approach for Engineering*, Wiley, pp.295-304. [2000]