

FDTD法を用いたマイクロポーラー弾性体中の 3次元弾性波動解析

群馬大学 大学院理工学府 学生会員 鈴木悠介
群馬大学 大学院理工学府 正会員 斎藤隆泰
東京工業大学 環境・社会理工学院 正会員 廣瀬壯一

1. はじめに

材料中の微視構造や局所回転まで考慮した連続体理論は、一般連続体理論と呼ばれている。その一般連続体理論の一つである、マイクロポーラー弾性論は、古くから研究されてきた。一般的に、静的な問題においては、解析領域が微視構造に比べて十分大きい場合、偶応力は無視できる。しかしながら、動的な問題において、弾性波の波長が微視構造と同程度の場合には、偶応力を無視できず、マイクロポーラー弾性体の理論を取り入れる必要があると言われている。このような中、著者らはマイクロポーラー弾性体中の面内波動解析をFDTD法を用いて行ってきた¹⁾。本研究では、その成果を3次元解析へと拡張する。以下では、3次元マイクロポーラー弾性論の基礎式、FDTD法解析の定式化について簡単に述べた後、数値解析結果を示すことで、本手法の妥当性を示す。最後に今後の課題等について述べる。

2. 3次元マイクロポーラー弾性波動問題

本節では、特に断りのない限り、ローマ文字の右下添字は1, 2, 3, の値を取り、総和規約に従うとする。線形マイクロポーラー弾性論における、運動方程式、変位-ひずみ関係式、構成関係式は、弾性体が等方であるとき、次のように表される²⁾。

1) 応力に関する基礎式

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (1)$$

$$\epsilon_{ij} = u_{j,i} - e_{ijk} \phi_k \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + (\mu + \kappa) \epsilon_{ij} + \mu \epsilon_{ji} \quad (3)$$

2) 偶応力に関する基礎式

$$m_{ji,j} + e_{ijk} \sigma_{jk} + l_i = \rho j \ddot{\phi}_i \quad (4)$$

$$\psi_{ij} = \phi_{j,i} \quad (5)$$

$$m_{ij} = \alpha \psi_{kk} \delta_{ij} + \beta \psi_{ji} + \gamma \psi_{ij} \quad (6)$$

ここで、 u_i , ϕ_i はそれぞれ変位および微視回転、 b_i , l_i は物体力および物体偶力、 ϵ_{ij} , ψ_{ij} はマイクロポーラーひずみおよび微視回転勾配、 σ_{ij} , m_{ij} は応力および偶応力であり、 ρ は密度、 j はマイクロ慣性モーメント、 $\lambda, \mu, \kappa, \alpha, \beta, \gamma$ はマイクロポーラー弾性定数である。また、 δ_{ij} はクロネッカーデルタ、 e_{ijk} は交代記号、 (\cdot) は時間微分、 $(\cdot)_{,i}$ は空間微分 $\partial/\partial x_i$ を表す。本研究では、式(1)-(6)を適当な初期値、境界値と共に解析するために、次節で述べるFDTD法³⁾を用いる。

3. FDTD法の定式化

本研究では、数値解析手法として有限領域を比較的容易に解析できるFDTD法を選定する。なお、マイクロポーラー弾性体中の弾性波は縦波、横波、および2種類の微視回転波の合計4種類存在することに注意されたい。3次元マイクロポーラー弾性波動問題における、応力および偶応力の運動方程式と構成関係式は、文献³⁾に倣いFDTD法のスキームに合わせて表記すると、式(1)-(6)より以下のように表せる。

1) 運動方程式

$$\rho \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i \quad (\text{応力}) \quad (7)$$

$$\rho j \ddot{\phi}_i = \frac{\partial m_{ji}}{\partial x_j} + e_{ijk} \sigma_{jk} + l_i \quad (\text{偶応力}) \quad (8)$$

2) 構成関係式

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} = & \lambda \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + (\mu + \kappa) \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} \\ & - (\mu + \kappa) e_{ijk} \dot{\phi}_k - \mu e_{jik} \dot{\phi}_k \quad (\text{応力}) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\dot{m}_{ij} = \alpha \frac{\partial \dot{\phi}_k}{\partial x_k} + \beta \frac{\partial \dot{\phi}_i}{\partial x_j} + \gamma \frac{\partial \dot{\phi}_j}{\partial x_i} \quad (\text{偶応力}) \quad (10)$$

FDTD法では、式(7)-(10)に空間および時間に対する中心差分近似を適用して離散化を行う。解析対象領域を微小セルに分割し、図1のように応力 σ_{ij} , 偶応力 m_{ij} と粒子速度 \dot{u}_i , 微視回転速度 $\dot{\phi}_i$ が空間的に交互に配置されるように格子配置する。例として、式(7)の粒子速度 \dot{u}_1 および、式(9)の応力 σ_{11} に関する式を図2(a), (b)を基に離散化を行うと、それぞれ次式が得られる。

$$\begin{aligned} \rho \frac{2\Delta d}{2\Delta t} (\dot{u}^{n+1} - \dot{u}^n) = & \left\{ \sigma_{11}^{n+\frac{1}{2}}(r) - \sigma_{11}^{n+\frac{1}{2}}(l) \right\} \\ & + \left\{ \sigma_{21}^{n+\frac{1}{2}}(f) - \sigma_{21}^{n+\frac{1}{2}}(b) \right\} \\ & + \left\{ \sigma_{31}^{n+\frac{1}{2}}(u) - \sigma_{31}^{n+\frac{1}{2}}(d) \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{2\Delta d}{2\Delta t} \left(\sigma_{11}^{n+\frac{1}{2}} - \sigma_{11}^{n-\frac{1}{2}} \right) = & (2\mu + \kappa + \lambda) \{ \dot{u}^n(r) - \dot{u}^n(l) \} \\ & + \lambda \{ \dot{v}^n(f) - \dot{v}^n(b) + \dot{w}^n(u) - \dot{w}^n(d) \} \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、 n は時間ステップ、 Δd は空間離散間隔、 Δt は時間離散間隔である。また、 x_1, x_2, x_3 方向の粒子速度 $\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{u}_3$ をそれぞれ $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$ と表記した。なお、 $\sigma_{ij}(\cdot)$ 等における括弧内のアルファベットは格子の節点に配置される変数の位置

Key Words: マイクロポーラー弾性論, FDTD法, 3次元マイクロポーラー弾性波動解析

〒376-8515 群馬県桐生市天神町1-5-1 群馬大学 大学院理工学府 TEL. 0277-30-1610 FAX. 0277-30-1610

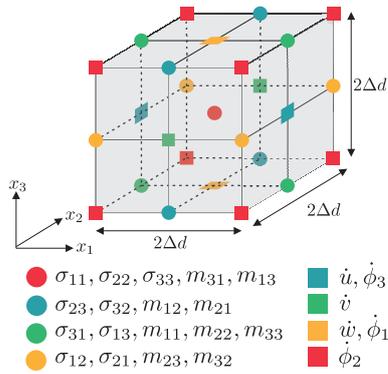
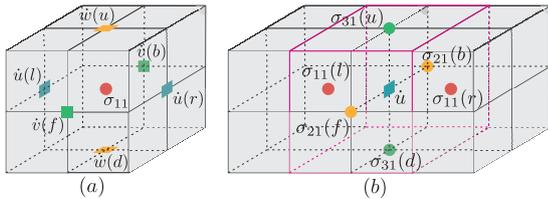


図1 3次元格子における各変数の節点配置.

図2 3次元格子 (a) 応力 σ_{11} を中心とする格子, (b) 粒子速度 \dot{u} を中心とする格子.

を示す。すなわち、図 2(a), (b) のように、上面に配置される変数は (u), 下面は (d), 右面は (r), 左面は (l), 前面は (f), 背面は (b) を表す。式 (11) は、解析領域中のある点、ある時刻における粒子速度 \dot{u} の値は、その点の n ステップ前の粒子速度 \dot{u} の値と、その粒子速度を囲む $n+1/2$ ステップ前の 6 つの応力から求められることを示している。式 (12) も同様である。また、他の変数に関する式も時間および空間を同様に離散化することで、それぞれ差分方程式が得られる。応力 σ_{ij} , 偶応力 m_{ij} および粒子速度 \dot{u}_i , 微視回転速度 $\dot{\phi}_i$ の差分方程式を時間的に交互に計算することで、解析領域内すべての変数を求めることができる。

4. 数値解析結果

以下、数値解析結果を示す。解析モデルは図 3 のような幅 20mm, 奥行き 20mm, 高さ 8mm のマイクロポーラー弾性体とした。入射波は周波数 $f=2\text{MHz}$ の正弦波 1 波とし、試験体上部中央の原点から $|x_1| \leq 0.16\text{mm}$ の範囲に粒子速度 $\dot{w}^{in} = w_0 \sin 2\pi t/T$ ($0 \leq t \leq T$) を与えた (その他は表面力フリー)。ここで w_0 は振幅, T は周期である。但し、実際の解析では振幅 $w_0 = 1.0$, 周期 $T = 5.0 \times 10^{-7}[\text{s}]$ としている。また解析で用いたパラメータは、総時間ステップ数 $n = 10000$, 空間離散間隔 $\Delta d = 4.0 \times 10^{-5}[\text{m}]$, 時間離散間隔 $\Delta t = 6.8 \times 10^{-10}[\text{s}]$ とした。材料定数は、それぞれ密度 $\rho = 2.19 \times 10^3[\text{kg}/\text{m}^3]$, マイクロ慣性モーメント $j = 0.019 \times 10^{-4}[\text{m}^2]$ とした。さらに、マイクロポーラー弾性定数は文献⁴⁾を参考に、それぞれ $\lambda = 7.59 \times 10^{10}[\text{N}/\text{m}^2]$, $\mu = 18.9 \times 10^9[\text{N}/\text{m}^2]$, $\kappa = 0.0149 \times 10^{10}[\text{N}/\text{m}^2]$, $\alpha = 0.7 \times 10^5[\text{N}]$, $\beta = 0.01 \times 10^5[\text{N}]$, $\gamma = 2.68 \times 10^5[\text{N}]$ と設定した。

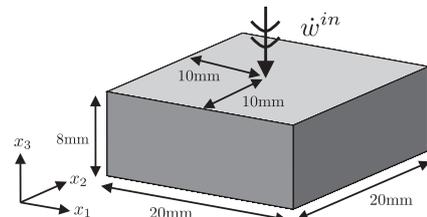
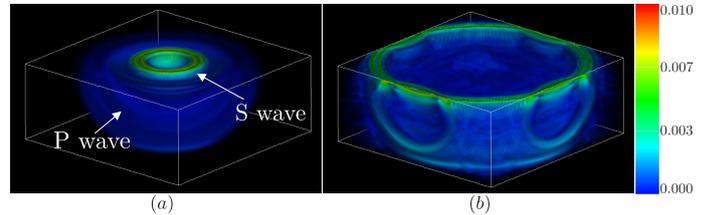
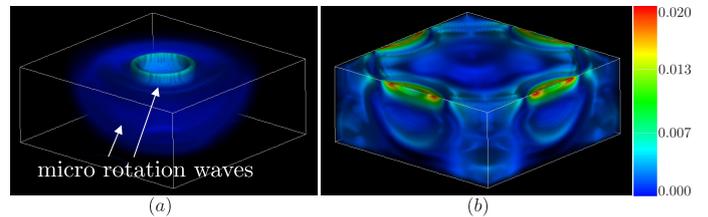


図3 解析モデル.

図4 弾性波動場 $\sqrt{\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2}$ の可視化結果 (a)2000step, (b)6000step.図5 微視回転波動場の $\sqrt{\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2 + \dot{\phi}_3^2}$ の可視化結果 (a)2000step, (b)6000step.

数値解析結果を図 4 および図 5 に示す。図 4 は弾性波動場の変位速度の絶対値 $\sqrt{\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2}$ を、図 5 は微視回転速度の絶対値 $\sqrt{\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2 + \dot{\phi}_3^2}$ を示している。図 4 および図 5 より試験体上部中央より弾性波が発生し、時間と共に縦波、横波に加え 2 種類の微視回転波が、いずれも球面状に伝搬していく様子が見て取れる。また図 4(b), 図 5(b) より、境界からの反射波の伝搬も確認できる。以上より、定性的ではあるが、3 次元マイクロポーラー等方弾性体中の波動伝搬現象を再現できた。

5. まとめと今後の課題

FDTD 法を用いたマイクロポーラー弾性体に対する 3 次元弾性波動解析を行い、4 種類の波動の可視化を行った。今後は、FDTD 法と比べて、自由反射境界や異種材料界面等の境界条件がより明確な EFIT を用いて、さらなる高精度化を目指す。また時間領域境界要素法を用いた場合の定式化も試み、FDTD 法の解析結果と比較をすることで、両者の解析結果の妥当性を検討する予定である。

参考文献

- 1) 鈴木悠介・斎藤隆泰・廣瀬壮一: FDTD を用いたマイクロポーラー弾性体中の 2 次元弾性波動解析, 土木学会関東支部第 47 回技術研究発表会, (2020)
- 2) 小林昭一編著: 波動解析と境界要素法, 京都大学学術出版会, (2000)
- 3) 佐藤雅弘著: FDTD 法による弾性振動・波動の解析入門, 森北出版株式会社, (2003)
- 4) R. Liangenga and J. Lalvohbika: Micro-inertial effect in the propagation of micropolar wave in micropolar medium, International Journal of Material Sciences (IJOMS), vol. 12(2), (2017), pp. 385-394