

## 軸対称問題における粒子・要素混合法とその適用

清水建設(株) 正会員 桐山貴俊・○福武毅芳

**1. はじめに** 著者はこれまで地盤の変形問題に適用する計算格子に基づく数値計算法の開発に取り組んできた。手法の特長は他著に詳しい(例えば1)。計算格子に基づく数値計算法(例えば Material Point Method, 以下 MPM)は、物理空間と計算空間を要することからこれらが一致する数値計算法に比べ計算負荷が大きいことが問題とされる。杭基礎、円筒構造物など軸対称問題と捉え平面空間で離散化することが可能である。著者らは、軸対称問題の定式化を実装することで、これら対象物を数値解析する際の計算負荷軽減に取り組んでいる。さらに本編において軸対称問題における粒子・要素混合法の定式化を提案し、さらなる計算負荷の軽減を実現する。軸対称問題における粒子・要素混合法とは、空間内において異なる空間解像度を実現する方法で、大きな変形勾配が期待される領域に空間解像度の高い粒子を、より小さな変形勾配が期待される領域には空間解像度の粗い要素を配置する手法である。以下にその定式化と解析例を示す。

**2. 粒子・要素混合法** 計算格子に基づく数値計算法の枠組みで、異なる空間解像度の離散化を実現するためには、物理空間と計算空間を関連付ける補間関数を使い分ける必要がある。補間関数を使い分けるためには、対象領域を複数の副領域へ分割する必要がある。対象領域の支配方程式(弱形式)は次式で表される。

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{a} d\Omega = - \int_{\Omega} \rho \sigma^s : \nabla \mathbf{w} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\tau} dS + \int_{\Omega} \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{b} d\Omega \quad (1)$$

ここに微少体積および表面要素をそれぞれ  $d\Omega$ ,  $dS$  で表す。領域  $\Omega$  を 2 つの副領域  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  に分割する場合、上式は次式の様に表される。

$$\begin{aligned} \left( \int_{\Omega_1} \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{a} d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{a} d\Omega_2 \right) = & - \left( \int_{\Omega_1} \rho \sigma^s : \nabla \mathbf{w} d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \rho \sigma^s : \nabla \mathbf{w} d\Omega_2 \right) \\ & + \left( \int_{\partial\Omega_1} \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\tau} dS_1 + \int_{\partial\Omega_2} \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\tau} dS_2 \right) + \left( \int_{\Omega_1} \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{b} d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{b} d\Omega_2 \right) \end{aligned} \quad (2)$$

on  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  and  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$

分割された副領域をそれぞれ離散化するために、連成項を導入し上式を次式に示す独立した 2 式に分離する。

$$\int_{\Omega_1} \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{a} d\Omega_1 = - \int_{\Omega_1} \rho \sigma^s : \nabla \mathbf{w} d\Omega_1 + \int_{\partial\Omega_1} \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\tau} dS_1 + \int_{\Omega_1} \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{b} d\Omega_1 + \int_{\partial\Omega_{1\Omega_2}} \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\tau}_{1\Omega_2} dS_{1\Omega_2} \quad (3a)$$

$$\int_{\Omega_2} \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{a} d\Omega_2 = - \int_{\Omega_2} \rho \sigma^s : \nabla \mathbf{w} d\Omega_2 + \int_{\partial\Omega_2} \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\tau} dS_2 + \int_{\Omega_2} \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{b} d\Omega_2 + \int_{\partial\Omega_{1\Omega_2}} \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\tau}_{2\Omega_1} dS_{2\Omega_1} \quad (3b)$$

ここに、 $\partial\Omega_{1\Omega_2}$  は副領域  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  の境界であり、 $\boldsymbol{\tau}_{1\Omega_2}$  および  $\boldsymbol{\tau}_{2\Omega_1}$  は分割境界における各領域の表面力を示す。 $dS_{1\Omega_2}$  および  $dS_{2\Omega_1}$  は分割境界における表面要素を示す。各式の末尾に記載する連成項は次の条件を満たす。

$$\int_{\partial\Omega_{1\Omega_2}} \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\tau}_{1\Omega_2} dS_{1\Omega_2} + \int_{\partial\Omega_{1\Omega_2}} \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\tau}_{2\Omega_1} dS_{2\Omega_1} = 0 \quad (4)$$

分割された副領域から構成される対象領域には 2 つの意味がある。1 つは対象領域が物理的に分割されること、もう 1 つは数学的に分割されることである。上式において対象領域は物理的に 2 つの副領域に分割された一方で、計算格子に基づく数値計算法においては、共通の計算格子を用いて運動方程式を解くことから、これら副領域は数学的には連続性を保っている。物理空間から計算空間へ物理量を輸送する過程で、境界における連続性が確保されることを仮定すれば、連成項は打ち消し合うことになる。以上より、式(3)は連成項を除いた形式で再定義される。

$$\int_{\Omega_1} \rho \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{a} d\Omega_1 = - \int_{\Omega_1} \rho \sigma^s : \nabla \mathbf{w}_1 d\Omega_1 + \int_{\partial\Omega_1} \mathbf{w}_1 \cdot \boldsymbol{\tau} dS_1 + \int_{\Omega_1} \rho \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{b} d\Omega_1 \quad (5a)$$

$$\int_{\Omega_2} \rho \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{a} d\Omega_2 = - \int_{\Omega_2} \rho \sigma^s : \nabla \mathbf{w}_2 d\Omega_2 + \int_{\partial\Omega_2} \mathbf{w}_2 \cdot \boldsymbol{\tau} dS_2 + \int_{\Omega_2} \rho \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{b} d\Omega_2 \quad (5b)$$

ここに、 $\mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{w}_2$  は領域毎に独立な重み関数である。上式は互いの境界において連続条件を要することから次式が付帯条件として付与される。

$$\partial\Omega_1 = \partial\Omega_2 \quad \text{on} \quad \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 \quad (6)$$

分割された副領域の支配方程式は、既存の定式化に従い各補間関数を用いて離散化する。これは、1 つの対象領域に対し、異なる補間関数が適用できることを示しており、空間解像度の異なる離散化が実現できることを意味している。本論文では特に、粒子性の高い補間関数である GIMP 法、連続性の高い補間関数である APDI 法を組み合わせ、粒子・要素混合法と呼称する。

**3. 軸対称粒子・要素混合法の妥当性確認** 妥当性確認で用いる解析対象は著者らが用いた浅い基礎の支持力問題である(例えば 2)。同じ問題を軸対称空間で解く。Fig.1 に解析モデルを示す。Fig.1(a)は解析対象を全て粒子で離散化した粒子モデル, Fig.1(b)は解析対象を粒子・要素を組み合わせて離散化した粒子・要素混合モデルである。Fig.1(b)に示す粒子・要素混合モデルは、基礎の貫入が予想される基礎直下地盤を粒子(GIMP 法)による離散化, 外周を要素(APDI 法)により離散化した。Fig.2 に両解析モデルから求まる荷重～沈下関係を示す。沈下量は対称軸地表における値である。Fig.2 によれば、載荷荷重 380(kPa) (状態(ii)) まで、いずれの解析モデルから求まる荷重～沈下関係は同じ曲線を示す。状態(ii)以降も概ね類似の曲線を示すが、粒子モデルの方が若干大きな沈下量を示す。Fig.3 に、Fig.2 に示す状態(i)～(iii)における最大せん断ひずみを示す。Fig.3(b)によれば、状態(i), (ii)における最大せん断ひずみの水平分布は、粒子による離散化範囲に留まる。そのため、粒子モデルと同じ荷重～沈下関係を示す。状態(iii)は、APDI 法による離散化範囲まで変形が伝達する。荷重～変位関係の差異は空間解像度に起因するものと考えられる。計算負荷に関して、粒子・要素混合モデルは、離散化要素数で半分以下、解析時間も 50%以上削減できており、計算時間および記憶領域の軽減に寄与することが確認できた。

**4. まとめ** 計算格子に基づく数値計算法における粒子・要素混合法の定式化を示した。同程度の空間離散化に設定することで粒子モデル、粒子・要素混合モデルは同じ解析結果を与えること、および、計算負荷の軽減に寄与することを示した。

**参考文献** 1) 桐山・肥後, 計算格子を利用した領域積分数値計算法の地盤大変形問題への適用, 土木学会論文集(応用力学) A2, Vol.72, No.2, pp. I\_155-I\_165, 2016.

2) 桐山貴俊, Material Point Method の浅い基礎の支持力問題への適用, 第 50 回地盤工学研究発表会, 2015.

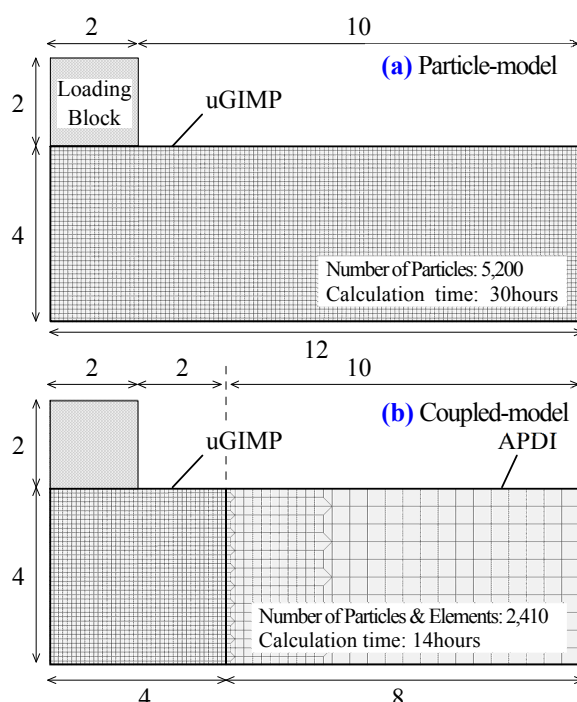


Fig.1 numerical model (unit:m)

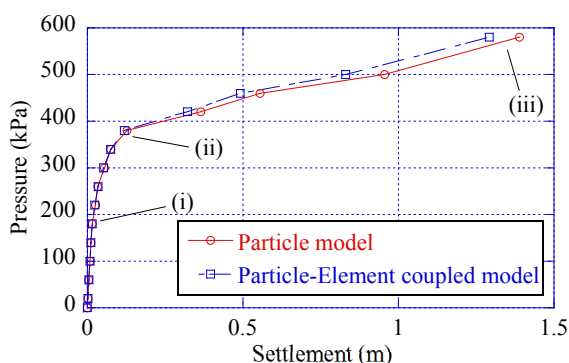


Fig.2 Comparison of pressure-settlement relationship

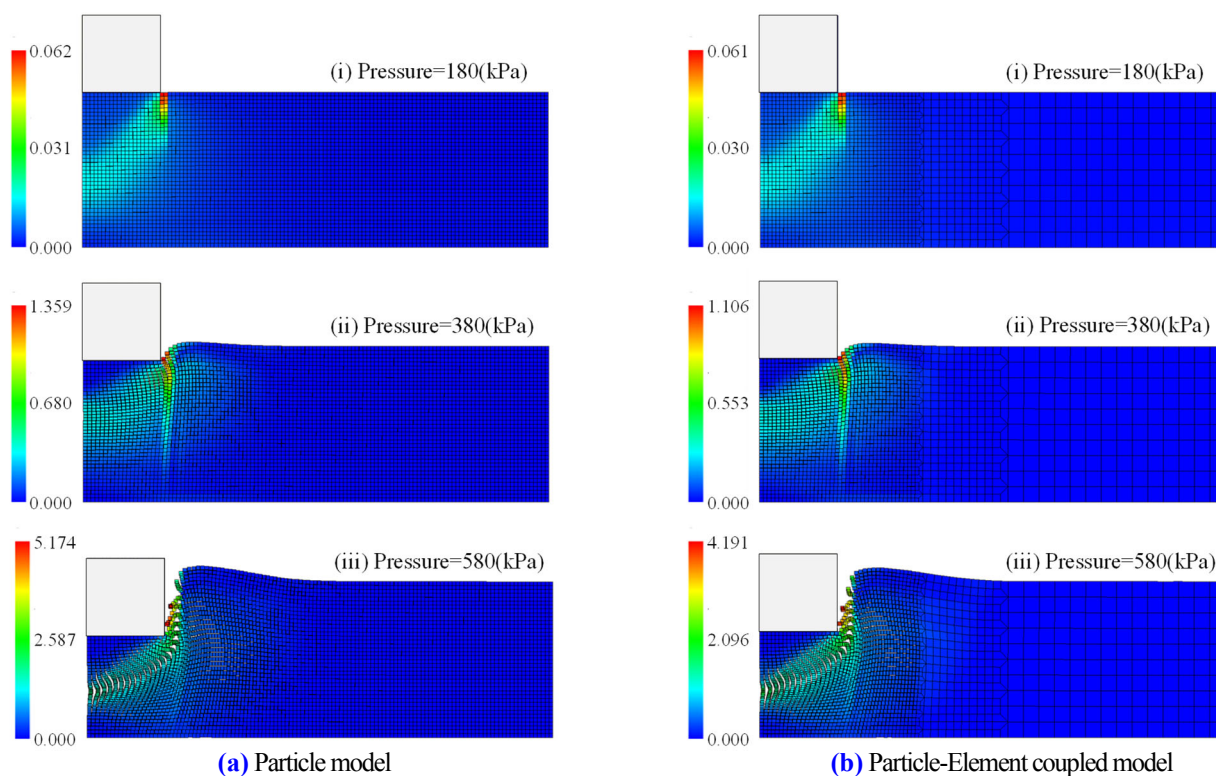


Fig.3 Comparison of spatial discretization (maximum shear strain contour)