# 計算格子に基づく数値計算法の軸対称定式化

清水建設(株)　正会員　○桐山貴俊・福武毅芳

**１．はじめに**　著者はこれまで地盤の変形問題に適用する計算格子に基づく数値計算法の開発に取り組んできた．流体力学では Particle In Cell（PIC）法，固体力学では Material Point Method（MPM）が代表的な手法である．計算格子に基づく数値計算法の特長は次の通りである．i)物理空間と計算空間を区別する．ii)物理空間・計算空間を関連付ける補間関数を用いる．iii)補間関数は，離散的な挙動（粒子）から連続的な挙動（要素）まで種々提案され，大変形問題への適用性が高い．一方で，物理空間・計算空間へ相互に物理量を伝達する計算負荷と記憶量の増加は有限要素法など物理空間・計算空間が一致した数値計算法に比べ難点と言える．特に，地盤の変形問題へ取り組む際，変形が局所化することから，精度の高い空間離散化を要する．3 次元問題においてはさらなる計算負荷が課題となる．一方，著者らが対象とする，杭基礎の鉛直挙動，円筒構造物の施工時解析など，軸対称問題として取り扱うことで，計算負荷の軽減を図ることができる．本論文では，Sulsky et al.が提案した MPM の軸対称定式化[1)]を種々の補間関数で実装した．軸対称定式化を実装する際の要点，検証および妥当性確認を実施した内容を以下に報告する．

**２．軸対称定式化**　2 次元定式化と比較することで，軸対称定式化を示す．解析対象に対し，弱形式で表された力の釣り合い式を MPM に基づき空間離散化することで，格子点における運動方程式として次式を得る．

$$a_g^k = \frac{1}{m_g^k}\left(f_g^{int,k} + f_g^{ext,k}\right) \tag{1}$$

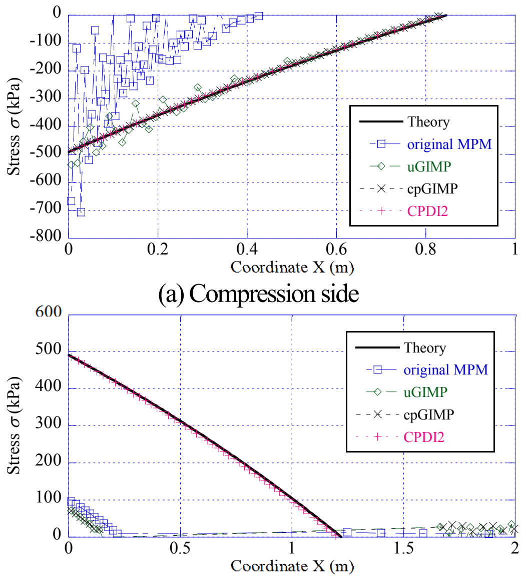
ここに，$a_g^k$，$m_g^k$，$f_g^{int,k}$，$f_g^{ext,k}$，はそれぞれ，格子点における加速度，質量，内力，外力を表す．上添え字$k$は計算ステップを示す．上式に示す内力，格子点質量を求めるための粒子質量，粒子ひずみ，について 2 次元平面ひずみ条件および軸対称条件でそれぞれ成分表示すると次表の通りとなる．

**Table.1** Comparison between 2D and axisymmetric formulation

| Dimension | Mass | Internal Forces | Strains |
|---|---|---|---|
| 2 次元 | $m_p = \rho_p A_p$ | $(f_x)_i^{int} = -\sum_{p=1}^{N_p} V_p\left(\sigma_{xx}\frac{\partial S_{i,p}}{\partial x} + \sigma_{xy}\frac{\partial S_{i,p}}{\partial y}\right)$<br>$(f_y)_i^{int} = -\sum_{p=1}^{N_p} V_p\left(\sigma_{yx}\frac{\partial S_{i,p}}{\partial x} + \sigma_{yy}\frac{\partial S_{i,p}}{\partial y}\right)$ | $\varepsilon_{xx} = \partial u/\partial x$<br>$\varepsilon_{yy} = \partial v/\partial y$<br>$\gamma_{xy} = \partial u/\partial y + \partial v/\partial x$ |
| 軸対称 | $m_p = \rho_p A_p R_p$ | $(f_r)_i^{int} = -\sum_{p=1}^{N_p} V_p\left(\sigma_{rr,p}\frac{\partial S_{i,p}}{\partial r} + \sigma_{rz,p}\frac{\partial S_{i,p}}{\partial z} + \sigma_{\theta\theta,p}\frac{S_{i,p}}{R_p}\right)$<br>$(f_z)_i^{int} = -\sum_{p=1}^{N_p} V_p\left(\sigma_{rz,p}\frac{\partial S_{i,p}}{\partial r} + \sigma_{zz,p}\frac{\partial S_{i,p}}{\partial z}\right)$ | $\varepsilon_{rr} = \partial u/\partial r$<br>$\varepsilon_{zz} = \partial v/\partial z$<br>$\varepsilon_{\theta\theta} = u/R_p$<br>$\gamma_{rz} = \partial u/\partial z + \partial v/\partial r$ |

ここに，$m_p$，$\rho_p$，$A_p$，$R_p$，はそれぞれ粒子質量，密度，支配面積，粒子中心の $r$軸座標，$S_{i,p}$は格子点$i$に対する粒子$p$の補間関数である．

**３．定式化の検証**　**Table.1** に記載の定式化に示す補間関数$S_{i,p}$はこれまで種々提案されてきている．**Table.1** に示す軸対称定式化が，いずれの補間関数においても適用可能か調べるため代表的な手法で実装した．実装したプログラムを Zhang et al が提案する重力場における 1 次元の有限変形理論解[2)]と比較した．比較結果を **Fig.1** に示す．**Fig.1(a)**よれば，圧縮場において original MPM は軸応力が振動し大変形下では理論解と一致しない．uGIMP 法は理論解の近傍値を示すがやはり振動している．cpGIMP 法および CPDI2 法は理論解と一致する．圧縮場においては，original MPM を適用性は困難と言える．**Fig.1(b)**よれば，引張場においては，CPDI2 法が理論解と一致する一方，他の手法はいずれも理論解とは一致しない．地盤材料は引張荷重に抵抗しないが，鋼材料など引張抵抗を示す材料をモデル化する場合は CPDI2 法を用いる必要がある．以上示す軸対称場の結果は，平面ひずみ場における結果と一致する．対称軸から離れた粒子も同じ結果を示すことから **Table.1** の定式化の実装は検証されたものと判断する．




(a) Compression side

(b) Tensile side

**Fig.1** 1D-verification for axisymmetric formulation

キーワード　粒子法，軸対称，大変形解析
連絡先　＊ 〒135-8530　東京都江東区越中島 3-4-17　清水建設(株) 技術研究所

**４．軸対称粒子法の妥当性確認**　妥当性確認に用いるのは，Lajeunesse et al.が実施した土柱の崩壊実験である[3)]. Lajeunesse et al.は円筒管内に堆積させた砂質土柱（材料はガラスビーズ）を，円筒管を瞬間的に引き上げることで，崩壊させる観察実験を実施した．彼らはアスペクト比を変化させ複数回の観察実験を実施し，アスペクト比と崩壊土の堆積距離・高さを記録した．本編で対象とするのは，これら観察実験の内，アスペクト比が，0.56，0.8，5.4，の 3 ケースである．各解析ケースにおける解析条件および物性値を **Fig.2**，**Table.2** に示す．計算格子幅は 2mm とし 1 格子あたり 2×2 の 4 粒子正方配置した．**Table.2** に示すヤング率，内部摩擦角は，Case1 を対象として別途実施した感度解析より決定した．地盤材料の構成則は破壊基準をモールクーロン則，ポテンシャル関数はダイレタンシー角 (0 度) を別途設定する非関連流れ則である．Woo Kean Shin は著者らと同じ再現解析を実施する際，オーダーの異なる地盤剛性（$E$）を採用し，再現性の高い解析結果を示した[4)]．著者らは，対象土柱の高さが数 cm と低拘束圧であることから，地盤物性を新たに設定し直した．**Fig.3** に実験および数値解析から求まる崩壊土柱の外郭線の経時変化をアスペクト比毎に示す．**Fig.3** によれば，0.02(s)間隔で示す土柱の崩壊過程 ($r/R_i \leq 1$) は実験，解析とも類似の結果を示す．一方で，水平堆積距離（**Fig.3** 横軸）はいずれのアスペクト比においても解析結果の方が大きな値を示す．また，**Fig.3(b)**によれば，Case2 については残留高さに若干の際が見られる．Lajeunesse et al.と同様の実験を Lube et al.も実施しており，Lajeunesse et al.および Lube et al.が提示する実験式[5),6)]と今回の解析結果を **Fig.4** に比較して示す．**Fig.4** によれば，解析結果は，水平堆積距離が実験式よりも大きい値を示す一方，堆積高さは実験式と整合する結果を示した．

**５．まとめ**　計算格子に基づく数値計算法の軸対称定式化，検証，を示した．妥当性確認では，連続性の高い領域（$r/R_i \leq 1$）で崩壊高さが実験結果と良い一致を示す一方，離散的な挙動を示す領域（$r/R_i > 1$）で示す堆積距離は数値解析の方が大きな値を示した．

**参考文献**　**1)** Sulsky et al., Axisymmetric form of the material point method with applications to upsetting and Taylor impact problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.139 pp.409-429, 1996. **2)** Zhang et al., Material point method enhanced by modified gradient of shape function, *Journal of Computational Phisics*, Vol.230, Issue 16, pp.6379–6398, 2011. **3)** Lajeunesse et al., Spreading of a granular mass on a horizontal plane, *Physics of Fluid*, Vol.16, No.7, 2004. **4)** Woo Kean Shin, Numerical simulation of landslides and deris flows using an enhanced material point method, *Doctoral dissertation*, University of Washington, 2009. **5)** Lajeunesse et al., Granular slumping on a horizontal surface, *Physics of Fluid*, Vol.17, 103302, 2005. **6)** Lube et al., Axisymmetric collapses of granular columns, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.508, pp.175-199, 2004.

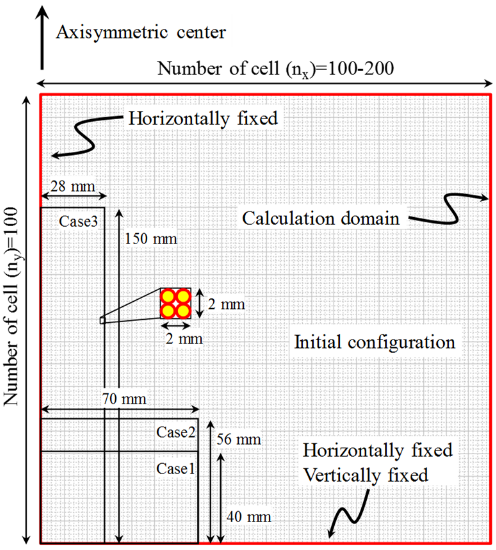
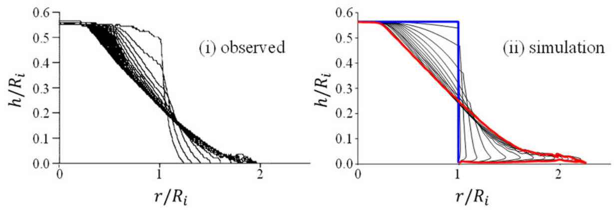


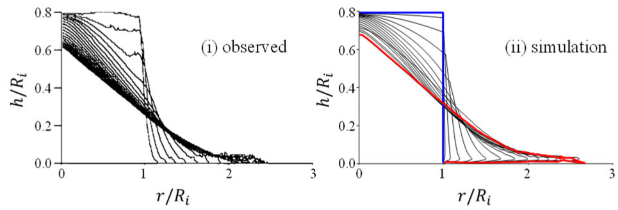

**Fig.2** Numerical model for sand column

**Table.2** Material properties and size of sand columns

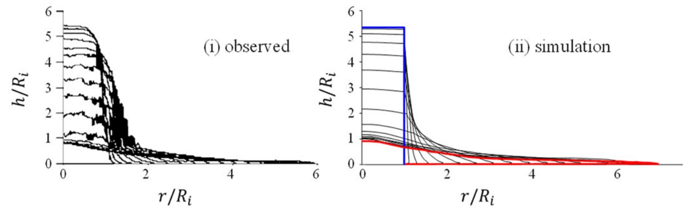
| Material No. | Radius $R$ m | Height $H$ m | Aspect Ratio $a$ - | Stiffness $E$ kPa | poisson's ratio $\nu$ - | unit weight $\gamma$ kN/m$^3$ | frictional angle $\phi$ deg. | cohesion $c$ kPa |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.0705 | 0.03948 | 0.56 | 100 | 0.333 | 15.10 | 25 | 0.0 |
| 2 | 0.0705 | 0.05640 | 0.80 | 100 | 0.333 | 16.14 | 25 | 0.0 |
| 3 | 0.0280 | 0.15120 | 5.40 | 100 | 0.333 | 15.79 | 25 | 0.0 |




**(a)** $a$=0.56




**(b)** $a$=0.8




**(c)** $a$=5.4

**Fig.3** Time history of collapsing column. Interval time is 0.02(s). Blue and red lines are initial and final configuration by simulation.

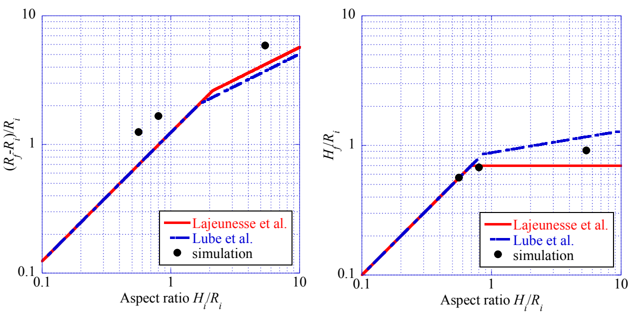



**Fig.4** Comparison of final deposit simulated with empirical formula