陽解法 FEM コードによる高速衝突問題の解法に関する基礎的検討

(株)大林組　正会員　○秋元　理仁　新田　祐平　松本　優資
JIP テクノサイエンス(株)　正会員　佐藤　一樹　戸田　圭彦　田中　克弘

1．はじめに

近年，衝突による貫入・削剥などを表現可能な数値解析技術の重要性が日に日に高まってきている．筆者らは衝突問題について研究[1),2),3)]を進めており，重錘の自由落下問題などの比較的低速な衝突現象に対して SPH 法を用いた解析を実施してきた．

航空機衝突やデブリ衝突など衝突速度が極めて大きい事象においては，貫入・削剥といった大変形だけではなく，衝撃波を取り扱えることが求められる．しかしながら，土木・建築において衝撃波の解析法に関する認識は低いのが現状である．

そこで，本稿では基礎的な検討として，ランキン・ユゴニオ関係式と Mie-Grüneisen 状態方程式を弾性ソリッド FEM モデルに適用し，衝撃波を生じさせる解析を実施した結果を報告する．

2．状態方程式（EOS）

高速衝突時には物体内に高圧力の圧縮波が生じ，状態量（圧力，内部エネルギー，密度）の不連続面（衝撃波面）を伴いながら成長，伝播する．衝撃波面の前後における状態量の保存則はランキン・ユゴニオ関係式と呼ばれる以下の3式で表される．

$$\rho_0 u_s = \rho_H (u_s - u_p) \quad (1)$$

$$p_H - p_0 = \rho_0 u_p u_s \quad (2)$$

$$\varepsilon_H - \varepsilon_0 = \frac{1}{2}(p_H + p_0)(1/\rho_0 - 1/\rho_H) \quad (3)$$

記号は**図-1** に対応しており，それぞれ質量保存則，運動量保存則，エネルギー保存則を表している．ここに，式(4)の衝撃波速度u_sと粒子速度u_pの線形関係を導入すれば，

$$u_s = c_0 + s u_p \quad (4)$$

$$p_H = p_0 + \rho_0 c_0^2 \eta/(1 - s\eta)^2 \quad (5)$$

ここに，sは材料定数，$\eta = 1 - v/v_0$である．式(5)はユゴニオ状態方程式と呼ばれる．

さらに，高圧力下では圧力の内部エネルギー依存性を無視できないため，Mie-Grüneisen 型の状態方程式を導入する．

$$p = p_c + \Gamma/v \cdot (\varepsilon - \varepsilon_c) \quad (6)$$

ここに，p_c：体積依存による圧力，ε_c：体積依存による内部エネルギー，v：相対体積（$=1/\rho$），Γ：Grüneisen 係数である．体積依存項にユゴニオ状態方程式を採用したものが，次式の Mie-Grüneisen－ユゴニオ状態方程式である．

$$p = p_H + \Gamma/v \cdot (\varepsilon - \varepsilon_H) \quad (7)$$

商用コードでは，式(7)を導入することで，式(1)～式(6)を反映した衝撃波の取り扱いを可能としている．

高速衝突は瞬間的な現象であるため，断熱条件（等エントロピー条件）で解かれることが多い．そこで，式(7)より状態方程式の等エントロピー曲線を求めておく．断熱条件は次式で表される．

$$p dv + d\varepsilon = 0 \quad (8)$$

Menikoff[4)]によれば等エントロピー条件は式(7)と式(8)を連立させた次の関係式によって表される．

$$d/dv(\varepsilon/\phi) = (p_H - (\Gamma/v)\varepsilon_H)/\phi \quad (9)$$

ϕは体積変化により内部エネルギーが変化することを表す係数であり，以下の式によって表現される．

$$\phi(v) = exp\left[-\int_{v_0}^{v}\left(\Gamma(v')/v'\right)dv'\right] = -e^{-g_0(v-v_0)} \quad (10)$$

なお，$\Gamma(v')/v' = \Gamma_0/v_0 = g_0$を仮定した．

式(9)を体積vに関して積分することで，以下の内部エネルギーに関する関係式を求めることができる．

$$\varepsilon = \phi(v)\int_{v_0}^{v} -\phi(v)^{-1}\{p_H - g_0\varepsilon_H\}dv' \quad (11)$$

式(11)を式(7)に代入することで，等エントロピー条件下における圧力と相対体積の関係式が得られる．

$$p = (p_H - g_0\varepsilon_H) - g_0\phi(v)\int_{v_0}^{v} -\phi(v)^{-1}\{p_H - g_0\varepsilon_H\}dv' \quad (12)$$

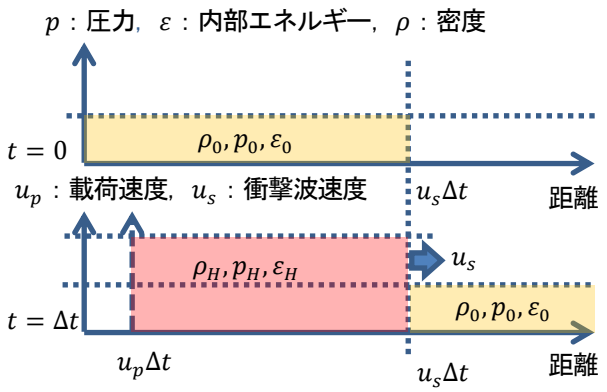

図-1　衝撃波面前後の状態量

キーワード　Mie-Grüneisen 状態方程式，衝撃波，有限要素法
連絡先　〒108-8502　東京都港区港南 2-15-2 インターシティ B 棟　(株)大林組　原子力本部　ＴＥＬ03-5769-2736

© Japan Society of Civil Engineers

3．FEM による衝撃波の解析

解析モデルは，**図-2** に示す 0.05m 四方の正方形断面，長さ 0.5m の弾性棒とする．棒の端部に強制速度を載荷し，反対側の端部は無反射境界とした．材料は SUS304 を想定し，材料物性値を**表-1** に示す．解析に用いたプログラムは LS-DYNA10.2 である．

図-3 に密度および内部エネルギーのコンター図を示す．ランキン・ユゴニオ関係式により状態量の不連続面（衝撃波面）が表現できていることが確認できる．

図-4 に部材中央（X=250mm）における圧力時刻歴波形を示す．載荷速度 100m/s では状態方程式を導入した影響はほとんどないが，載荷速度 1,000m/s，10,000m/s では圧力波の大きさや形状，伝播速度に大きな差がある．**図-5** に載荷速度 10,000m/s のケースの応力伝播の様子を示す．山形の圧力波が時間経過とともに三角形状の圧力波になっていく．これは，状態方程式を導入した結果，波動伝播速度が圧力に依存して一様でなくなること，音源（載荷面）が移動することによるドップラー効果のような圧力の重なりが生じることが原因であると考えられる．

また，載荷速度 10,000m/s（EOS あり）時の$p-v$関係は式(12)の理論解と一致していた．（**図-6**）

4．まとめ

本研究では一軸状態の弾性棒モデルを対象に衝突速度および状態方程式による結果への影響を検討し，状態方程式を導入した場合には高速載荷時の圧力および伝播速度が大きくなることを確認した．したがって，高速衝突問題においては状態方程式の導入が不可欠であると考えられる．また，等エントロピー問題において，弾性体の圧力-相対体積関係の理論解を導出した．

参考文献　1) 秋元ら：粒子法(SPH 法)による土塊衝突荷重評価に関する研究,土木学会第 72 回年次学術講演会, III-282, 2017. 2) 秋元ら：Mohr-Coulomb 弾塑性構成則を用いた重錘衝突実験の有限要素解析，土木学会第 71 回年次学術講演会, III-369, 2018. 3) 松本ら：SPH-FEM ハイブリッドモデルによる重錘衝突実験の再現解析，土木学会第 71 回年次学術講演会, III-368, 2018. 4) Menikoff : Complete Mie-Gruneisen Equation of State, Los Alamos National Lab, 2016.05.02.

表-1　材料物性値

項目				SUS304（弾性）
材料物性パラメータ	弾性係数	E	(N/mm^2)	2.0×10^5
	縦弾性波速度	V_p	(m/s)	5838
	ポアソン比	ν	(-)	0.3
	密度	ρ	(kg/m^3)	7900
状態方程式パラメータ	バルク音速	c	(m/s)	4570
	S値	S	(-)	1.49
	Grüneisen係数	Γ	(-)	2.17

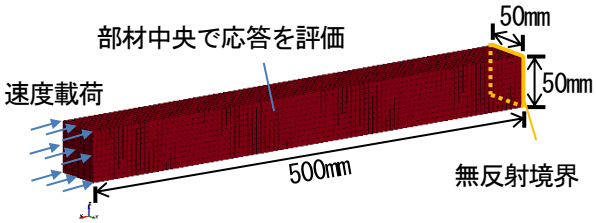

図-2　解析モデル

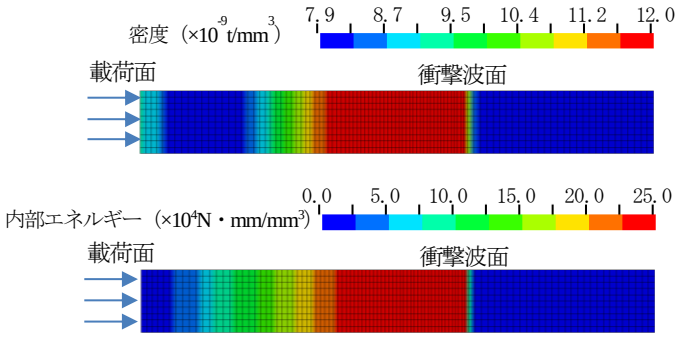

図-3　状態量のコンター図（載荷速度 10,000m/s，EOS あり）

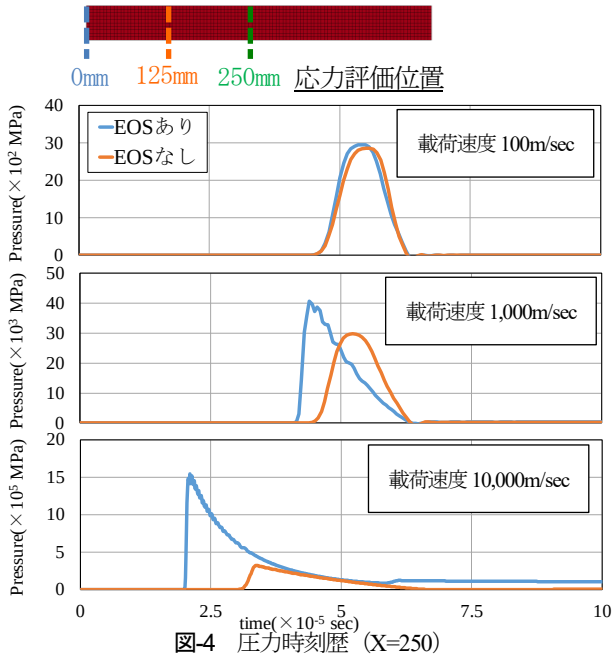

図-4　圧力時刻歴（X=250）

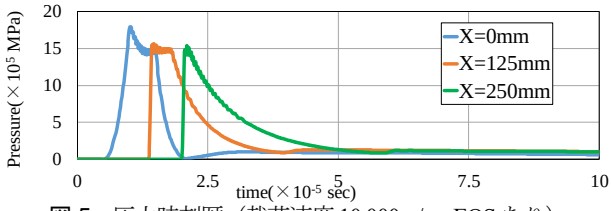

図-5　圧力時刻歴（載荷速度 10,000m/s，EOS あり）

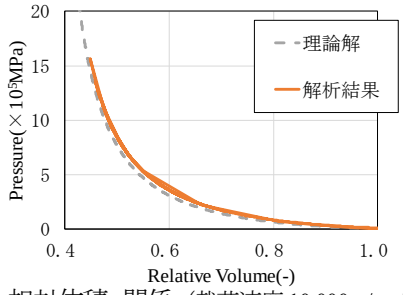

図-6　圧力p-相対体積v関係（載荷速度 10,000m/s，EOS あり）

※数値減衰を OFF とした

© Japan Society of Civil Engineers