Fourier 級数による Huber 型異方性半無限体の数値解析

（株）構造メンテ　正会員　○樋口慶太郎
（株）構造メンテ　河野　一資
（株）井沢設計　正会員　廣瀬　清泰
大阪工業大学名誉教授　正会員　堀川都志雄

１．はしがき

集中荷重を受ける等方弾性半無限体の厳密解(=代数解)には, 表面に作用する Boussinesq の解, Cerruti の解, および弾性体内部に作用する Mindlin 解 I と II がよく知られている [1),2)]．本報告では水平面内を等方性，鉛直方向に異方性を呈する Huber 型異方弾性体での変位関数を新たに導き, Mindlin 問題を対象に Fourier 級数をこの変位関数に適用する．この問題が多層系構造として扱えることを示し，数値解析を通して異方性パラメータがどの程度影響するのかを明らかにする．また部分荷重を受ける半無限体での鉛直方向の弾性定数が深さ方向に変化する例を取り上げ，変位と応力が等方性体に比べてどの様な分布性状を表すのかを算出する．

２．変位関数の級数表示

Huber 型異方性体のフックの法則は次式で表される．

$$\begin{aligned}\sigma_x &= (\lambda+2\mu)\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y + \sqrt{\rho}\lambda\varepsilon_z\ , \quad \tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}\ ,\\ \sigma_y &= \lambda\varepsilon_x + (\lambda+2\mu)\varepsilon_y + \sqrt{\rho}\lambda\varepsilon_z\ , \quad \tau_{xz} = \sqrt{\rho}\mu\gamma_{xz}\ ,\\ \sigma_z &= \sqrt{\rho}\lambda\varepsilon_x + \sqrt{\rho}\lambda\varepsilon_y + \rho(\lambda+2\mu)\varepsilon_z\ , \quad \tau_{yz} = \sqrt{\rho}\mu\gamma_{yz}\end{aligned} \tag{1}$$

ここで，λ,μ:ラメの定数，$\rho = E_z/E_0$，E_0：基準弾性定数

物体力Zに関する変位関数の基礎式，および変位との関係式を式(2)と式(3)に示す．

$$\sqrt{\rho}(\partial_x^2+\partial_y^2+\sqrt{\rho}\partial_z^2)^2 f_3 = -2Z(\lambda+\mu)/(\lambda+2\mu)\ ,\quad \left(\partial_x^2+\partial_y^2+\sqrt{\rho}\partial_z^2\right)\theta_3 = 0 \tag{2}$$

$$\begin{aligned}&2\mu u = -\sqrt{\rho}\partial_x\partial_z f_3 + \partial_y\theta_3\ ,\quad 2\mu v = -\sqrt{\rho}\partial_y\partial_z f_3 - \partial_x\theta_3\ ,\\ &2\mu w = (\lambda+2\mu)/(\lambda+\mu)[\partial_x^2+\partial_y^2+\sqrt{\rho}\mu/(\lambda+2\mu)\partial_z^2] f_3\end{aligned} \tag{3}$$

これまで半無限体の解析では水平方向のスパンを無限とする Fourier 変換が用いられてきたが，本報告では荷重域に比して有限の大きなスパンで表現される Fourier 級数を採用する．

水平面内に座標原点を置き，これと直交する鉛直方向を z 軸とする有限厚さの版に対する変位関数の級数表示は次式で示される [3)]．

$$\begin{aligned}f_3 &= \sum\sum[\mathrm{C}_1\,\mathrm{ch}\gamma z + \mathrm{C}_2\,\mathrm{sh}\gamma z + \mathrm{C}_3\,\gamma z\,\mathrm{ch}\gamma z + \mathrm{C}_4\,\gamma z\,\mathrm{sh}\gamma z]\,\sin\alpha_m x\cos\beta_n y\ ,\\ \theta_3 &= \sum\sum[\mathrm{C}_5\,\mathrm{ch}\gamma z + \mathrm{C}_6\,\mathrm{sh}\gamma z]\,\cos\alpha_m x\sin\beta_n y\end{aligned} \tag{4}$$

ここで，$\alpha_m = m\pi/a$，$\beta_n = n\pi/b$，$\gamma^2 = (\alpha_m^2+\beta_n^2)/\sqrt{\rho}$，$\mathrm{ch}\,\gamma z = \cosh\gamma z$，$\mathrm{sh}\,\gamma z = \sinh\gamma z$，

a, b：x, y方向のスパン，$m, n = 0,1,2\cdots$，C_1~ C_6：版の上下面から決定される積分定数

また深さ方向 z の無限遠で変位と応力が消滅する条件での変位関数は次式で与えられる．

$$\begin{aligned}f_3 &= \sum\sum[\mathrm{C}_1 e^{-\gamma z} + \mathrm{C}_2\gamma z\,e^{-\gamma z}]\sin\alpha_m x\cos\beta_n y\ ,\\ \theta_3 &= \sum\sum[\mathrm{C}_3 e^{-\gamma z}]\cos\alpha_m x\sin\beta_n y\end{aligned} \tag{5}$$

３．既往の厳密解と級数解との変位での比較

Boussinesq 問題や Cerruti 問題での比較例は紙面の都合上割愛し，Mindlin 問題を取り上げる．Mindlin 問題を 2 層からなる多層構造の内部に集中荷重が作用する問題に置き換える．1 層目の変位関数には有限厚さの式(4)を，2 層目の半無限体に式(5)をそれぞれ採用し，これらから得られる変位が接合界面で連続条件式を満たすよ

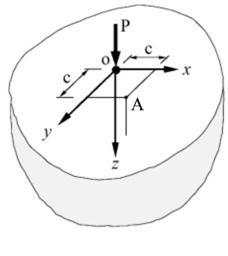
キーワード　Huber 型異方性体，異方性体の変位関数，Mindlin 解，Boussinesq 問題，Cerruti 問題
連絡先　〒651-0072 兵庫県神戸市中央区脇浜町 2-11-4（株）構造メンテ 営業部　TEL 078-862-1350　FAX 078-862-1351

うに合成する．またこの問題の級数解を導く方法には，①作用力を微小な体積内に分布する物体力に置換する手法と，②1 層目と 2 層目の接合界面での伝達力に作用力と見合う応力 gap（段差量）を加味する手法があり，本手法では②の手法を採用する．

等方性半無限体の内部に集中荷重が z 方向に作用する Boussinesq タイプ（**図－1**）と y 方向に作用する Cerruti タイプ（**図－2**）を想定する．任意点 A(c,c)での級数解と厳密解による変位の比較をそれぞれ**表－3** と**表－4** にまとめる．

表－3　Boussinesq タイプでの変位の比較（x/c=y/c=1.0）

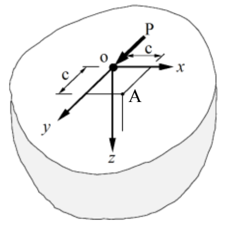
変位	$u\,E_0c/P(\times10^{-1})$			$w\,E_0c/P(\times10^{-1})$		
解の種類	厳密解	級数解		厳密解	級数解	
異方性度	ρ=1	ρ=1	ρ=2	ρ=1	ρ=1	ρ=2
z /c=0.0	-0.573	-0.573	-0.419	2.071	1.836	1.103
0.5	-0.209	-0.209	-0.167	2.093	1,858	1.112
1.0	0.025	0.025	0.004	2.043	1,808	1.099
1.5	0.169	0.170	0.111	1.957	1.722	1.064



図－1　Boussinesq 問題

表－4　Cerruti タイプでの変位の比較　（x/c=y/c=1.0）

変位	$u\,E_0c/P(\times10^{-1})$			$v\,E_0c/P(\times10^{-1})$		
解の種類	厳密解	級数解		厳密解	級数解	
異方性度	ρ=1	ρ=1	ρ=2	ρ=1	ρ=1	ρ=2
z /c=0.0	0.334	0.334	0.322	1.832	1.728	1.572
0.5	0.280	0.279	0.267	1.841	1.741	1.552
1.0	0.284	0.286	0.254	1.813	1.714	1.504
1.5	0.231	0.231	0.211	1.623	1.526	1.363



図－2　Cerruti 問題

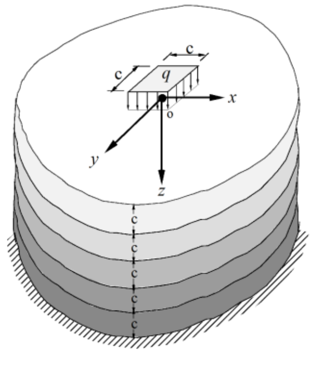
４．部分荷重下での異方性半無限体

深さ方向の弾性定数が E_z/E_0=1.0～2.0 まで順次漸増する等厚 c の 5 層からなる半無限多層構造に，荷重中心と座標原点が一致する部分荷重（載荷面積 c×c）が作用する問題を考える（**図－3**）．半無限体の z 方向の無限遠での条件の代用として，5 層目の下層に大きな弾性定数（=10 E_0）と厚い層（=10c）を設ける．Mindlin 解の算出方法と同様の手法を適用すれば，y 軸に沿った位置の接合界面での連続条件を満足する各層上面での主な変位と応力の結果を**表－5** に掲げる．

接合界面での変位と応力はいずれも連続条件を満足していることは言うまでもない．

表－5　深さ方向に弾性定数が変化する半無限多層体の変位と応力（x/c=0.0）

項目	$v\,E_0/qc(\times10^{-1})$		$w\,E_0/qc(\times10^{-1})$		$\sigma_z/q(\times10^{-1})$		$\tau_{yz}/q(\times10^{-1})$	
座標	y/c=0.5		y/c=0.0		y/c=0.0		y/c=0.5	
ρ	1.0	1.0~2.0	1.0	1.0~2.0	1.0	1.0~2.0	1.0	1.0~2.0
1 層	-1.301	-1.235	9.375	8.797	-9.808	-9.808	0.0	0.0
2 層	0.422	0.397	3.527	2.849	-3.368	-3.545	-0.889	-0.872
3 層	0.175	0.162	1.533	1.119	-1.107	-1.268	-0.211	-0.219
4 層	0.088	0.080	0.727	0.490	-0.558	-0.679	-0.069	-0.077
5 層	0.045	0.040	0.279	0.175	-0.368	-0.461	-0.029	-0.034
最下層	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.272	-0.344	-0.023	-0.028



図－3　部分荷重下での異方性半無限体

５．あとがき

本手法を用いれば，弾性定数が深さ方向に変化する半無限多層体を多層系構造に置換することで，部分荷重下での挙動が容易に数値解析できると推察される．詳細は当日発表する．

参考文献

1) 関口秀雄,西田義親,土質工学ハンドブック 4 章,土質工学会,技法堂,pp.107-141,1982.

2) Mindlin,R.D.,Force at point in the interior of semi-infinite solid,Physcs,Vol.7,No.5.,pp.195-203,1936.

3) 廣瀬清泰,樋口慶太郎,河野一資,堀川都志雄,はさみ込み法による異方性多層版の数値解析,第 10 回,道路橋床版シンポジウム論文報告集,pp.301-306,2018 年 11 月.