

Huber 型異方性半無限体での代数解の提案

(株) 井 沢 設 計 正会員 ○廣瀬 清泰
三井住友建設(株) フェロー会員 三上 浩
大阪工業大学名誉教授 正会員 堀川都志雄

1. はしがき

著者らは直交異方性体における 9 個の独立な弾性定数の低減化により派生する Huber 型異方性体での変位関数群に関する式系の誘導と Fourier 級数による open solution をもとに、異方性を呈する層からなる異方性多層版の数値解析を行った^{1),2)}。R.D.Mindlin は等方性半無限体の内部に点荷重を有する問題を対象に、Boussinesq 問題や Cerruti 問題での代数解 (=Closed solution) を包括する、いわゆる Mindlin 解を発表した³⁾。また T.C.Woo らは横等方性体での閉じた解を導出しているが、面内に異方性を呈する場合については言及していない⁴⁾。

本研究では Mindlin の提示した Galerkin-vector を変形することにより、*x-y* 平面を水平面とする異方性半無限体における Boussinesq 問題や Cerruti 問題での代数解を提案する。特に弾性定数の大きい方向(*y*)と直交する方向(*x*)に集中荷重が作用する Cerruti 問題の代数解の誘導には、変位関数群の基礎式や変位との関係式の確立が不可欠であることを示す。

2. Boussinesq 問題と Cerruti 問題での代数解

Huber 型異方性体の MODE M ($E_x \leq E_y$)、すなわち *y* 方向の弾性定数 E_y が *x* および *y* 方向の E_0 と異なる場合でのフックの法則を式(1)に示す。

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_x + \sqrt{\alpha}\lambda\varepsilon_y & + \lambda\varepsilon_z & , \quad \tau_{xy} = \sqrt{\alpha}\mu\gamma_{xy} , \\ \sigma_y &= \sqrt{\alpha}\lambda\varepsilon_x & + \alpha(\lambda + 2\mu)\varepsilon_y & + \sqrt{\alpha}\lambda\varepsilon_z & , \quad \tau_{xz} = \mu\gamma_{xz} , \\ \sigma_z &= \lambda\varepsilon_x & + \sqrt{\alpha}\lambda\varepsilon_y & + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_z & , \quad \tau_{yz} = \sqrt{\alpha}\mu\gamma_{yz} \end{aligned}$$

(1)

ここで、 λ, μ : ラメの定数、 $\alpha = E_y/E_x$ 、 E_0 : 基準の弾性定数

異方性体での変位関数群の基礎式は 3 つの独立な物体力に対応するベクトル形式で表現される。

$$\begin{aligned} (\partial_x^2 + \sqrt{\alpha}\partial_y^2 + \partial_z^2)^2 \mathbf{f} &= -2\mathbf{B}(\lambda + \mu)/(\lambda + 2\mu) , \\ (\partial_x^2 + \sqrt{\alpha}\partial_y^2 + \partial_z^2) \boldsymbol{\theta} &= 0 \end{aligned}$$

(2)

ここで、 $\mathbf{f} = f_1\mathbf{i} + \sqrt{\alpha}f_2\mathbf{j} + f_3\mathbf{k}$ 、 $\boldsymbol{\theta} = \theta_1\mathbf{i} + \sqrt{\alpha}\theta_2\mathbf{j} + \theta_3\mathbf{k}$ 、 $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$: 物体力

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$: *x, y, z* 方向の単位ベクトル

x, y, z 方向の、それぞれの変位 *u, v, w* と変位関数群 ($\mathbf{f}, \boldsymbol{\theta}$) との関係式を表-1 にまとめる。

表-1 変位と変位関数との関係式

	f_1	θ_1	f_2	θ_2	f_3	θ_3
$2\mu u$	$2(1-\nu)(\partial_x^2 + \sqrt{\alpha}\partial_y^2) + (1-2\nu)\partial_x^2$	---	$-\sqrt{\alpha}\partial_x\partial_y$	$-\partial_z$	$-\partial_x\partial_y$	$\sqrt{\alpha}\partial_y$
$2\mu v$	$-\partial_x\partial_y$	∂_z	$2(1-\nu)(\partial_x^2 + \partial_z^2) + (1-2\nu)\sqrt{\alpha}\partial_y^2$	---	$-\partial_y\partial_z$	$-\partial_x$
$2\mu w$	$-\partial_x\partial_z$	$-\sqrt{\alpha}\partial_y$	$-\sqrt{\alpha}\partial_y\partial_z$	∂_x	$2(1-\nu)(\partial_x^2 + \sqrt{\alpha}\partial_y^2) + (1-2\nu)\partial_z^2$	---

表-2 各問題での変位の代数解

	Cerruti 問題 (Cx type)	Cerruti 問題 (Cy type)	Boussinesq 問題
$2\mu u$	$\frac{P}{2\pi} \frac{1}{\sqrt[4]{\alpha}} \left[\frac{1}{R} + \frac{x^2}{R^3} + \frac{(1-2\nu)}{R+z} \left\{ 1 - \frac{x^2}{R(R+z)} \right\} \right]$	$\frac{P}{2\pi} \left[\frac{xy}{\sqrt[4]{\alpha}} \left\{ \frac{1}{R^3} - \frac{(1-2\nu)}{R(R+z)^2} \right\} \right]$	$\frac{P}{2\pi} \left[\frac{x}{\sqrt[4]{\alpha}} \left\{ \frac{z}{R^3} - \frac{(1-2\nu)}{R(R+z)} \right\} \right]$
$2\mu v$	$\frac{P}{2\pi} \left[\frac{xy}{\sqrt[4]{\alpha}} \left\{ \frac{1}{R^3} - \frac{(1-2\nu)}{R(R+z)^2} \right\} \right]$	$\frac{P}{2\pi} \frac{1}{\sqrt[4]{\alpha}} \left[\frac{1}{R} + \frac{y^2}{\sqrt{\alpha} R^3} + \frac{(1-2\nu)}{R+z} \left\{ 1 - \frac{y^2}{\sqrt{\alpha} R(R+z)} \right\} \right]$	$\frac{P}{2\pi} \left[\frac{y}{\sqrt[4]{\alpha}} \left\{ \frac{z}{R^3} - \frac{(1-2\nu)}{R(R+z)} \right\} \right]$
$2\mu w$	$\frac{P}{2\pi} \left[\frac{x}{\sqrt[4]{\alpha}} \left\{ \frac{z}{R^3} + \frac{(1-2\nu)}{R(R+z)} \right\} \right]$	$\frac{P}{2\pi} \left[\frac{y}{\sqrt[4]{\alpha}} \left\{ \frac{z}{R^3} + \frac{(1-2\nu)}{R(R+z)} \right\} \right]$	$\frac{P}{2\pi} \frac{1}{\sqrt[4]{\alpha}} \left[\frac{z^2}{R^3} + \frac{2(1-\nu)}{R} \right]$

Mindlin による Boussinesq 問題(図-1)や Cerruti 問題(図-2)での Galerkin-vector を基本に置き, 異方性体での変位関数の導出を試みるために Boussinesq 問題を取上げる. 動径ベクトル $R = \sqrt{x^2 + y^2 + \sqrt{\alpha} + z^2}$ と係数パラメータ ω を導入し, Boussinesq 問題の変位関数を式(3)のように仮定すれば, 深さ方向の応力 σ_z は式(4)で与えられる.

$$F_z = Pk/(2\pi\omega)[R + (1-2\nu)\{z \log(R+z) - R\}] \quad (3)$$

$$\sigma_z = P/(2\pi\omega)[-3z^3/R^5] \quad (4)$$

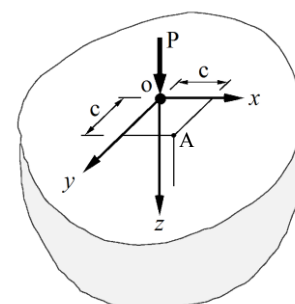


図-1 Boussinesq 問題

ここで, 下添字 z は集中荷重の作用方向を示す.

荷重点での応力のつり合いから, パラメータ ω は $\sqrt[4]{\alpha}$ と決定される.

同様にして Cerruti 問題での変位関数は以下の様に示される.

$$F_x = Pi/\{4\pi(1-\nu)\sqrt[4]{\alpha}\}[R + 2(1-\nu)(1-2\nu)\{z \log(R+z) - R\}] \\ + Pk/\{4\pi(1-\nu)\sqrt[4]{\alpha}\}[(1-2\nu)\{x \log(R+z)\}] \quad (5-1)$$

$$F_y = Pj/\{4\pi(1-\nu)\sqrt[4]{\alpha}\}[R + 2(1-\nu)(1-2\nu)\{z \log(R+z) - R\}] \\ + Pk/\{4\pi(1-\nu)\sqrt[4]{\alpha}\}[(1-2\nu)\{y \log(R+z)\}] \quad (5-2)$$

ここで, 下添字 x, y は集中荷重の作用方向を意味し, それぞれ Cx type や Cy type と名付ける.

式(3)と(5)中の異方性パラメータ $\alpha=1$ とすれば, 関数 F_x, F_y, F_z は等方性体における各問題での変位関数に帰着する. 上式に伴う変位 u, v, w の代数解を表-2 にまとめる.

換言すれば Cx type や Cy type の代数解の導出には, 前提としてこれらの関連する式系が不可分であることを意味している. 表-2 と式(1)から応力 $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{yz}$ 等が求められる.

3. あとがき

本代数解と級数解との比較は当日発表する予定である.

参考文献

- 1) 廣瀬清泰, 樋口慶太郎, 河野一資, 堀川都志雄, はさみ込み法による異方性多層版の数値解析, 第10回, 道路橋床版シンポジウム論文報告集, pp.301-306, 2018年11月.
- 2) 三上 浩, 藤田広志, 井之上賢一, 廣瀬清泰, 堀川都志雄, シート補強工法における補強効果と再補強工による余寿命の比較, 第10回, 道路橋床版シンポジウム論文報告集, pp.5-10, 2018年11月.
- 3) Mindlin, R.D., Force at point in the interior of semi-infinite solid, Physcs, Vol.7, No.5., pp.195-203, 1936.
- 4) Woo, T.C. and Shield, R.T., Fundamental solutions for small deformations superposed on finite biaxial extension of an elastic body, Ach. Rat. Mech. Anal., Vol.9, pp.196-224, 1962.

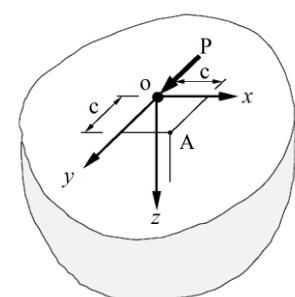


図-2 Cerruti 問題 (Cy type)