二次元弾性波動問題における
トポロジー感度法を用いた欠陥形状再構成

○群馬大学大学院理工学府　　学生会員　田代匡彦
群馬大学大学院理工学府　　学生会員　森川光
群馬大学大学院理工学府　　正会員　　斎藤隆泰

1. はじめに

構造物の維持管理を行う上で, 非破壊検査を行うことは重要である. 特に, 構造物内部の欠陥を非破壊評価する代表的な方法の一つとして, 超音波非破壊評価法が知られている. 超音波非破壊評価法による欠陥形状再構成に関する研究として, 開口合成法が挙げられる. しかし, 開口合成法は, 計測した受信波形を振幅を重みとして, 対応する空間位置にプロットしていく単純な手法であり, 散乱波に含まれる欠陥の情報を使い切れているとは言えない. そこで, 本研究では, 波動場の数値解と材料表面での計測値との差からなる目的汎関数を導入し, Bonnet が定式化した, 対象領域の微小なトポロジー変化に対する目的汎関数の変化率で定義されるトポロジー感度 1) を用いた散乱体決定解析を行う. 以下では, 解くべき問題やトポロジー感度の定式化を説明した後, 簡単な散乱体決定解析結果を示すことで本研究の妥当性について検討する. なお, 本研究では, 解析対象を面内波動場として, 散乱体決定解析を行う. また, 散乱波動場の計算には, 演算子積分時間領域境界要素法 2) を用いる.

2. 解くべき問題

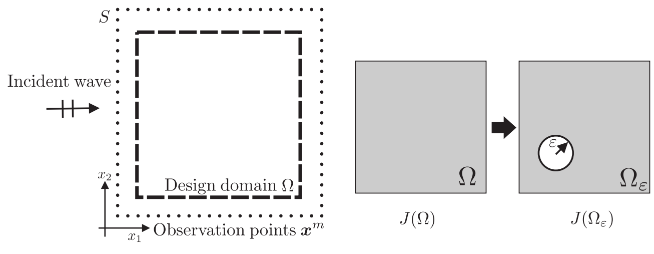
図 1(a) のような, 散乱体の位置, 個数, 形状が不明である二次元無限等方性材料を考える. 散乱体が存在し得る領域を Ω(Design domain) と仮定し, 最適な散乱体の位置, 個数, 形状を決定する問題を考えれば, 解くべき問題は, 以下のような面内波動場 $\boldsymbol{u}$ の初期値境界値問題 (順問題) となる.

$$\begin{cases} \nabla(\boldsymbol{C}:\nabla\boldsymbol{u})(\boldsymbol{\xi},t)=\rho\ddot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\xi},t) & (\boldsymbol{\xi}\in\Omega, t>0) \\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\xi},0)=\dot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\xi},0)=0 & (\boldsymbol{\xi}\in\Omega, t=0) \end{cases} \tag{1}$$

ただし, t は時間, $\boldsymbol{C}$ は弾性定数, ρ は密度, $\dot{(\ )}$ は時間微分を表し, 散乱波は放射条件を満足するとする. また, 領域 Ω に x_1 方向正の向きに伝搬する平面波を入射し, 散乱体が適当な位置に存在すると仮定した場合の仮想的な境界 S 上の観測点 $\boldsymbol{x}^m$ における面内波動場 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}^m,t)$ と散乱体が正解散乱体の位置に存在する場合の計測データ $\boldsymbol{u}^{\mathrm{obs}}(\boldsymbol{x}^m,t), 0\le t\le T$ の差である以下の目的汎関数 $J(\Omega)$ を導入する.

$$J(\Omega)=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{Ns}\int_0^T\varphi(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}^m,t),\boldsymbol{x}^m,t)dt \tag{2}$$

$$\varphi(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}^m,t),\boldsymbol{x}^m,t)=|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}^m,t)-\boldsymbol{u}^{\mathrm{obs}}(\boldsymbol{x}^m,t)|^2 \tag{3}$$



(a)　(b)

図 1 欠陥形状再構成問題 (a) 設計領域 (Design domain) (b) トポロジー感度.

ここに, N_s は観測点の総数である. 式 (2) より, 目的汎関数 $J(\Omega)$ を最小化する問題を考える. すなわち, 本研究では, 以下の章で説明する, 目的汎関数に定義されたトポロジー感度より, 最適な散乱体の位置, 個数, 形状等を決定する問題 (逆問題) を考える.

3. トポロジー感度

図 1(b) のような, 対象領域 Ω 内部の内点 $\boldsymbol{\xi}$ に, 新たな無限小の空洞 (半径 ε) が発生した時の目的汎関数を $J(\Omega_\varepsilon)$ とする. この時, 一般的に, トポロジー感度 $\mathcal{T}(\boldsymbol{\xi})$ は, 空洞発生前後の目的汎関数の変化率を, 発生した空洞の面積で除した形で定義され, 以下の式で与えられる.

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{\xi})=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{J(\Omega_\varepsilon)-J(\Omega)}{\pi\varepsilon^2} \tag{4}$$

式 (4) より, 発生した空洞を散乱体とすると, 正解散乱体がある位置 $\boldsymbol{\xi}$ のトポロジー感度 $\mathcal{T}(\boldsymbol{\xi})$ は, 目的汎関数が減少する方向 ($J(\Omega_\varepsilon)<J(\Omega)$) より, 必ず負であり, 大きな値をもつと考えられる.

式 (2) - (4) より, 本解析で用いるトポロジー感度 $\mathcal{T}(\boldsymbol{\xi})$ は以下の式で与えられる.

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{\xi})=\{\nabla\boldsymbol{u}*(\boldsymbol{D}:\nabla\hat{\boldsymbol{u}})+\rho\dot{\boldsymbol{u}}*\dot{\hat{\boldsymbol{u}}}\}(\boldsymbol{\xi},T) \tag{5}$$

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{C}:\boldsymbol{A}:\boldsymbol{C} \tag{6}$$

$$A_{ijkl}=\frac{3}{2}[(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})-\frac{1}{5}\delta_{ij}\delta_{kl}] \tag{7}$$

ここに, $\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\xi},t)$ はトポロジー感度 $\mathcal{T}(\boldsymbol{\xi})$ を解析的に解くために定義した随伴波動場の解であり, $*$ は畳込み積分, δ_{ik} は Kronecker のデルタである. なお, 随伴波動場の入射波 $\hat{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{\xi},t)$ は, 観測点 $\boldsymbol{x}^m$ での順問題の解 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}^m,t)$ と正解散乱体の時の計測データ $\boldsymbol{u}^{\mathrm{obs}}(\boldsymbol{x}^m,t)$ の差を振幅とし, 観測点を波源とする点源波を逆伝搬させて得られる. その際, 順問題と同様に, 無限領域を考慮する. 順問題と随伴波動場の解

Key Words: 時間領域境界要素法, 弾性波動, 逆解析, トポロジー感度
〒 376-8515　群馬県桐生市天神町 1-5-1・TEL/FAX:0277-30-1610

より, 式 (5) のトポロジー感度 $\mathcal{T}(\boldsymbol{\xi})$ を対象領域 Ω 内部の全内点で求めることにより, 散乱体のおよその位置, 個数, 形状を決定する.

4. 数値解析例

図 2(a) のような, 正解散乱体を原点 $(0, 0)$ を中心とする半径 a の散乱体として, 散乱体の位置, 個数, 形状が不明であるとした場合に, 欠陥を再構成する解析を行った.

(1) 等方性材料中の二次元弾性波動解析 (順解析)

式 (3) より, 散乱体決定解析では, 散乱体が正解の位置に存在する場合の計測データ $\boldsymbol{u}^{\mathrm{obs}}(\boldsymbol{x}^m, t)$ が必要となる. 本解析では, 対象領域 Ω や観測点 $\boldsymbol{x}^m$ における面内波動場を求めるために, 最新の境界要素法である演算子積分時間領域境界要素法を用いた. また, 入射波は図 2(a) に対して, x_1 方向正の向きに伝搬する平面波とし, 以下の式で与えた.

$$u_1^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{\xi}, t) = \frac{u_0}{2}(1 - \cos 2\pi\alpha) \tag{8}$$

$$\alpha = \begin{cases} \dfrac{c_L}{\lambda}\left(t - \dfrac{x_1 + 5a}{c_L}\right) & \text{for} \quad (0 \le \alpha \le 1) \\ 0 & \text{for} \quad \text{otherwise} \end{cases} \tag{9}$$

ここに, u_0 は振幅を表す. 解析パラメータは, 振幅を $u_0 = 1.0$, 波長 $\lambda/a = 1.0$ と与えた. また, 境界要素解析では, 空洞を 72 個の区分一定要素で離散化し, 総時間ステップ数 N を N=256, 時間増分 $c_L \Delta t/a = 0.0865$ で与えた. また, 縦波速度 c_L, 横波速度 c_T の比 c_L/c_T は $c_L/c_T = \sqrt{3}$ であり, ポアソン比 ν は $\nu = 0.25$ とした. 図 2(b) - (e) は, いくつかの時刻 $c_L t/a$ における面内波動場を示している. なお, 参考のため散乱体の位置を白円で示してある. 図 2(b) - (e) より, 等方性材料中を伝搬する平面波と, 散乱体からの散乱波が, 外部境界で反射せず, 無限遠方に伝搬している様子が見て取れる. 以上の数値解析結果で得られた観測境界 S 上の全変位場を計測データ $\boldsymbol{u}^{\mathrm{obs}}(\boldsymbol{x}^m, t)$ として, 散乱体決定解析を行う.

(2) 欠陥形状再構成 (逆解析)

図 2(a) のような, 1 辺 $10a$ の対象領域 Ω に対して, 最適な散乱体を決定した数値解析結果を示す. 解析パラメータは, 4 節 (1) における等方性材料中の二次元弾性波動解析で用いたものと同様である. 観測点 $\boldsymbol{x}^m$ は境界 S 上に図 2(a) のように, 1 辺 $14a$ の正方形上に, 等間隔に 56 点配置した. 本研究では, この種の研究に対する第一段階として, 適当な位置に散乱体を仮定せず, 散乱体が存在していない対象領域 Ω に対して, 順問題と随伴場解析を行い, 解 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\xi}, t), \hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\xi}, t)$ を求め, 式 (5) のトポロジー感度 $\mathcal{T}(\boldsymbol{\xi})$ により, 散乱体を決定する問題へ帰着させた. なお, 式 (5) の $\nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\xi}, t), \nabla \hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\xi}, t), \dot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\xi}, t), \dot{\hat{\boldsymbol{u}}}(\boldsymbol{\xi}, t)$ は, 境界積分方程式を空間方向または, 時間方向に関して微分することで求めた. 図 2(f) に, 対象領域 Ω 内部の $101 \times 101 = 10201$ 点の全内点でのトポロジー感度 $\mathcal{T}(\boldsymbol{\xi})$ をプロットした結果を示す. 参考のため, 正解散乱体の位置を白線で示してある. 図 2(f) より, トポロジー感度 $\mathcal{T}(\boldsymbol{\xi})$ は, 正解散乱体周辺で大きな負の値を示していることが見て取れる. 以上のことから, 本手法を用いて, 対象領域 Ω 内部の正解散乱体の位置, 個数を正しく決定できており, 本手法の妥当性が示せた. しかし, 形状に関しては, 入射波が散乱体に当たる面以外は, 十分な精度で決定出来ていない. このため, 欠陥形状再構成の精度の向上には, 異なる方向から入射波を入射したより多くの計測データが必要になると考えられる.

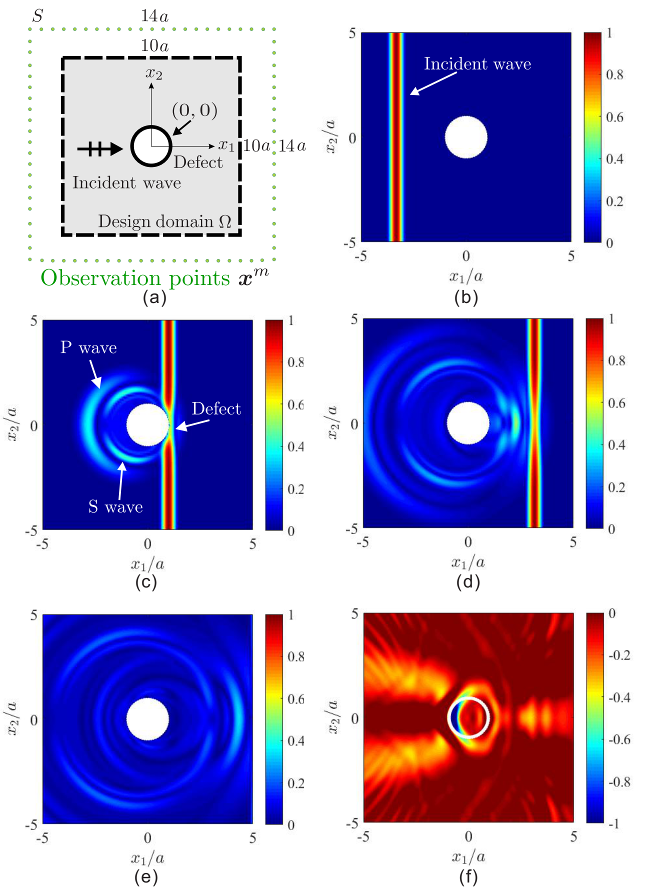


図 2 散乱体決定解析 (a) 解析モデル (b) $c_L t/a \simeq 2.16$ (c) $c_L t/a \simeq 6.49$ (d) $c_L t/a \simeq 8.65$ (e) $c_L t/a \simeq 10.81$ における波動場 (f) 散乱体決定解析結果.

5. まとめと今後の課題

目的汎関数の変化率で定義されるトポロジー感度 $\mathcal{T}(\boldsymbol{\xi})$ より, 散乱体の位置, 個数, 形状が不明であるとした場合にそれら散乱体を決定する解析を行った. また, 本研究で用いたトポロジー感度 $\mathcal{T}(\boldsymbol{\xi})$ を定義した後, 数値解析結果より, 本研究の妥当性を検証した. 今後は, 三次元弾性波動問題への拡張や, 実用面を見据えて非破壊評価への応用を行う予定である.

参考文献

1) M. Bonnet: Topological sensitivity for 3D elastodynamic and acoustic inverse scattering in the time domain, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.195, pp.5239-5254,2006.
2) 斎藤隆泰, 石田貴之, 福井卓雄, 廣瀬壮一：演算子積分法および高速多重極法を用いた新しい二次元時間領域動弾性境界要素法について, 応用力学論文集, Vol.11, pp.193-200,2008.