令和元年度土木学会全国大会第74回年次学術講演会

数値解析により抽出される空間モードを利用した津波のリスク評価

○東北大学大学院工学研究科　学生会員　外里 健太
日本工営株式会社 中央研究所　正会員　小谷 拓磨
東北大学災害科学国際研究所　正会員　森口 周二
東北大学災害科学国際研究所　正会員　寺田 賢二郎
新潟大学自然科学系建設学科　正会員　大竹 雄

1. はじめに

津波などの自然災害の中には，多くの不確実性が含まれており，それらのリスクを確率論的に論じるためにはモンテカルロシミュレーション等を行う必要がある．ただし，十分な試行回数が必要となるため，高い計算コストを要する数値解析と融合させるには工夫が求められる．本研究では，主成分分析によるモード分解の理論を応用して，数値解析結果からリスク指標の応答曲面を効率的に作成し，低い計算コストでリスク指標の確率分布が得られる仕組みを構築することを目的とする．

2. 特異値分解

まず，データ行列を定義する．i 番目のケースのデータを n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}_i$ として表現し，このデータが N ケース分あるとき，データ行列を以下のように定義する．

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} - & \boldsymbol{x}_1^T & - \\ & \vdots & \\ - & \boldsymbol{x}_N^T & - \end{pmatrix} \tag{1}$$

行列を分解する 1 つの方法として，特異値分解がある．特異値分解は以下のように表される．

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{U}^T \tag{2}$$

ここで $\boldsymbol{U}$ は共分散行列の固有ベクトル $\boldsymbol{u}_i$ を列ベクトルとする行列であり，この $\boldsymbol{u}_i$ がデータの特徴を表現している．また $\boldsymbol{V}$ は $\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T$ の固有ベクトル $\boldsymbol{v}_i$ を列ベクトルとする行列であり，$\boldsymbol{\Sigma}$ は対角項に特異値 σ_i が並ぶ行列である．これらは共分散行列の固有値の平方の値と一致する．式 (2) を展開すると以下の式のようになる．

$$\boldsymbol{X}^T = \begin{pmatrix} | & & | \\ \boldsymbol{x}_1 & \cdots & \boldsymbol{x}_N \\ | & & | \end{pmatrix} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^T = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{u}_j(\sigma_j \boldsymbol{v_j}^T) \tag{3}$$

$$\boldsymbol{x}_i = \sum_{j=1}^{n}(\sigma_j v_{ij})\boldsymbol{u}_j \tag{4}$$

ここで $\boldsymbol{V}$ の i 行 j 列成分を v_{ij} とした．このように，各データが共分散行列の固有ベクトル（モード）の線形結合として表現できることがわかる．また，情報量が少ない，すなわち特異値（共分散行列の固有値）が小さいモードについては省略してデータを表現できるため，次式のように $r < n$ 個のモードを用いてデータを縮約することが可能である．

$$\hat{\boldsymbol{x}}_i = \sum_{j=1}^{r}(\sigma_j v_{ij})\boldsymbol{u}_j \tag{5}$$

3. 応答曲面の作成

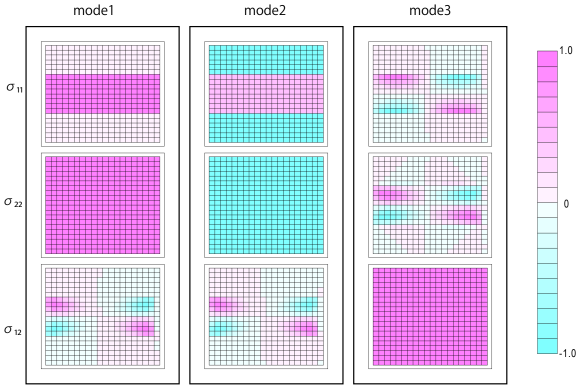
各モードに対応する係数を入力パラメータ $\boldsymbol{a}$ の関数で近似することで応答曲面を作成する．具体的な数式では以下のようになり，各モードの寄与度（重み）が入力パラメータによって決定されるという形になる．これにより，任意のケースに対して対象とする量の分布の算出が可能となる．

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a}) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j(\boldsymbol{a})\boldsymbol{u}_j \tag{6}$$

4. 検証例題

先で述べた理論の検証例題として，2 次元線形弾性体のマルチスケール解析データに適用する．具体的には，マクロひずみを与えたときのミクロ構造の応力分布のデータを対象とする．入力データは，マクロひずみの 3 成分をそれぞれ与えた 3 ケースとした．

データ行列は 1 つのケースの応力 3 成分を 1 つのベクトルとして定義し，行方向に並べたものとする．特異値分解により得られたモードを図-1 に示す．このように，共分散行列の固有ベクトルから各応力成分の分布の様子を読み取ることができる．また，特異値分解の結果から各ケースごと各モードに対応する係数を算出することが可能であるた



図–1 応力分布のモード

Key Words: 特異値分解, 主成分分析, 応答曲面

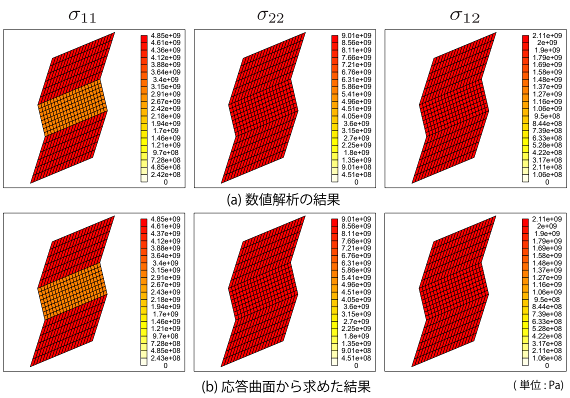
〒980-8572 仙台市青葉区荒巻字青葉 468-1 災害科学国際研究所 4F S403-S404, TEL 022-752-2132, FAX 022-752-2133

め，これらを用いて各モードに対応する係数をマクロひずみの関数として以下のような形で表現する．

$$\alpha_j(\boldsymbol{E}) = a_j E_{11} + b_j E_{22} + c_j E_{12} \quad (j = 1, 2, 3) \qquad (7)$$

この関数とモードを用いることで，式 (6) のような応答曲面を作成することができる．

次に，任意のマクロひずみを与えたときの応力分布について，数値解析の結果と応答曲面から得られる結果を比較することで検証を行う．マクロひずみ $(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ を与えたときの比較を図-2 に示す．このように空間モードの線形結合で求めたい量の分布を表現可能であるということがわかる．

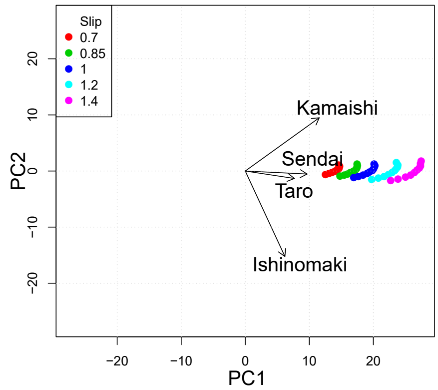


図–2 数値解析結果との比較

5. 広域津波解析データへの適用

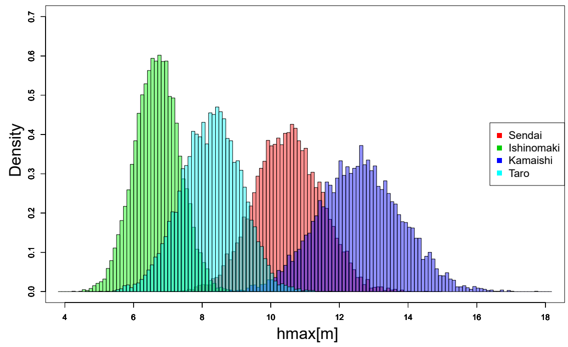
ここでは，広域津波解析提案手法を広域津波解析のデータへ適用する．小谷ら [1] は，2011 年東北地方太平洋沖地震の津波を対象として，東北地方 3 都市の津波リスクを数値解析結果に基づいて確率論的に評価している．本研究では，小谷らの広域津波解析のデータに情報を追加して提案手法を適用する．入力パラメータとして断層パラメータのすべり量（Slip）とすべり角（Rake）を変化させた 50 ケースでの 4 つの都市（仙台，石巻，釜石，田老）の最大津波高さの解析結果のデータを用いる．特異値分解から得られたモードにを用いて各都市について 2 次元で表現したものを図-3 に示す．図に示すベクトルが各都市の第 1 主成分（PC1）及び第 2 主成分（PC2）の固有ベクトルの成分を表現している．第 1 主成分についてみるとベクトルが同じ方向を指していることから，どの都市も同じような特徴を示し，第 2 主成分は，釜石と石巻が反対の方向を向おり，これらの都市が異なる傾向を示すことがわかる．

また，各モードに対応する係数を入力パラメータであるすべり量とすべり角の関数として表現する．これにより，第 1 モードに対応する係数がすべり量の寄与が大きく，第 2 モードではすべり角の影響が大きいというように各モード



図–3 2 つの主成分で表現した各ケースの値と各都市の傾向

の寄与の大きさを入力パラメータと関連付けることができる．これとモードの情報を組み合わせることで，式 (6) のような応答曲面を作成でき，任意ケースでの計算が可能になる．この応答曲面とパラメータのばらつきの情報を用いてモンテカルロシミュレーションを行うことで，図-4 のような各都市の最大津波高さの確率分布を求めることができる．



図–4 各都市の最大津波高さの確率分布

6. まとめ

複数ケースの数値解析結果を利用して任意のリスク指標の応答曲面を作成することで計算コストをかけずに確率論的な評価を行う可能になるということが示された．今回は 4 つの都市と対象にした量が少なく，空間的な意味合いが薄いものであったが，この対象とする数を多くすることで空間的な分布の特徴が明確になり，さらに有用なものになると考えられる．

■謝辞: 本研究の一部は，中部電力株式会社「原子力に係る公募研究」（課題名：数値解析に基づく不確実性を考慮した津波リスクの空間相関評価）の助成を受けた．記して感謝の意を表す．

参考文献

1) 小谷 拓磨, 高瀬 慎介, 森口 周二, 寺田 賢二郎, 福谷 陽, 大竹 雄, 野島 和也, 桜庭 雅明: 応答曲面を用いた数値解析援用確率論的津波ハザード評価，土木学会論文集 A2（応用力学）,Vol 72, No. 1, pp 58-69, 2016.