Adaptive Discontinuous Galerkin 法のための高解像度化方法の検討

筑波大学院　学生会員　○南手　陽太郎
筑波大学　正会員　田中　聖三

1. はじめに

自由表面流れの解析手法に，界面捕捉法[1]がある．界面捕捉法は界面を関数の分布により間接的に表現し，固定メッシュ上で界面を捕捉する方法である．界面捕捉法は界面関数の分布が不正確になると，自由表面が不明瞭になる．そのため，界面関数の更新を行うための移流方程式の解法は，高精度であることが求められる．一般に，空間解像度を上げることで高精度な解を得ることができるが，解析領域全体の空間解像度を上げると，計算コストが増大してしまう．そのため，自由表面の挙動に合わせて高解像度化する手法として，Adaptive 法がある．Adaptive 法には，要素を細分化することで解像度を高くする h 法，要素の高次化を行うことで解像度を高くする p 法，またそれらを組み合わせる hp 法がある．

そこで，本研究では，h 法と p 法のどちらが優位であるかを検証することを目的として，それぞれの手法を模擬する解析を行った．数値解析例として，基礎的な検討を行うため 1 次元移流問題を取り上げる．

2. 数値解析手法

(1) Adaptive Discontinuous Galerkin 法

離散化手法として，Adaptive 法の導入が容易な Discontinuous Galerkin (DG)法[2]を用いる．DG 法は，解析領域を連続しない個別の要素群とその要素境界群に分割し，要素ごとに定義される不連続な近似関数を用いる手法である．ここで，一般的な有限要素法で h 法を用いて要素を 1 段階の細分化を行うとき，図 1(a)のように，細分化する要素の周辺の要素を分割するような工夫が必要になる．しかし DG 法では，連続しない個別の要素群を用いるため図 1(b)のように，対象の要素のみを細分化することができる．また，p 法を適用する場合，有限要素法では隣接する要素間で値が連続しているため，連立一次方程式に付加条件を設ける必要があり，導入が難しい．一方で，DG 法では隣接する要素が独立しているため，p 法の導入も容易である．以上の性質から，DG 法は Adaptive 法の導入によく適した離散化手法であると言える．

(2) 支配方程式および境界条件

界面関数ϕの挙動は以下の移流方程式に支配される．

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + v\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \qquad \text{on } \Omega \tag{1}$$

ここで，Ωは解析領域，vは流速である． 境界条件は以下の Dirichlet 条件が課せられる．

$$\phi = \hat{\phi} \qquad \text{on } \Gamma_{in} \tag{2}$$

ここで， Γ_{in}は$v \cdot \mathbf{n} < 0$となる流入境界を表す．$\mathbf{n}$は外向き法線ベクトルである．また，初期条件として，領域内での分布は以下のように与えられる．

$$\phi = \phi_0 \qquad \text{on } \Omega \tag{3}$$

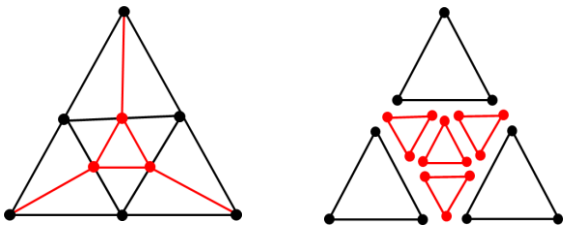
ϕ_0は時刻 0 でのϕの分布である．

(3) DG 法による離散化

各要素内部の集合を$\widetilde{\Omega}$，その要素境界の集合をΓ_{int}とし，支配方程式(1)を離散化すると，以下の重み付き残差方程式が得られる．

$$\int_{\widetilde{\Omega}} w^h \frac{\partial \phi^h}{\partial t} d\Omega - \int_{\widetilde{\Omega}} \frac{\partial w^h}{\partial x} \cdot (v^h \phi^h)\, d\Omega - \int_{\Gamma_{int}} \left[[w^h]\right] (v^h \phi^{h-}) \cdot \boldsymbol{n} d\Gamma = 0 \tag{4}$$

ここで，$[[\mathrm{w}]] = \mathrm{w}^+ - \mathrm{w}^-$であり，$v \cdot \mathbf{n} > 0$の境界は＋で表され，その反対側が－で表される．DG 法は隣



(a)有限要素法　(b)DG 法

図 1：h 法で分割したモデル

キーワード　Discontinuous Galerkin method, Adaptive Method, Advection Equation
連絡先　〒305-8573　茨城県つくば市天王台 1-1-1，E-mail：sun.south.74@gmail.com

© Japan Society of Civil Engineers

接要素間で節点が共有されないため，要素間での物理量は式(4)第 3 項の境界Γ_{int}の積分項を通して行われる．また，時間方向に陽的 3 段階 3 次精度 Total Variation Diminishing Runge-Kutta (TVDRK)法を用いて離散化する．TVDRK 法は，一般的な RK 法に比べて確保すべき配列が少ないという利点がある．

3. 数値解析例

(1) 解析モデル

図 2 に示す解析モデルに対し，解析条件として時間増分 Δt = 0.001，移流速度 v = 1 を用いる．界面関数の初期分布は，不連続関数である矩形分布と，連続関数である正弦関数分布を用いる．解析領域端(x=0, 10)では，周期境界条件を課す．なお，本論文では，理論解を Theory，Adaptive 法を適用しないモデル(図 3 (a))を DG，h 法を模擬したモデル(図 3(b))を DG(h)，p 法を模擬したモデル(図 3(c))を DG(p)と表記する．

(2) 解析結果

解析結果として，図 4 に，各条件で解析した界面関数の分布を示す．図より，初期分布に連続関数と不連続関数を用いた解析で，t = 10 において DG(h)と DG(p)に有意な差は見られない．しかし，t = 50, 100 では DG(h)は関数分布が大きく崩れているのに対して，DG(p)は比較的に形状を維持できている．

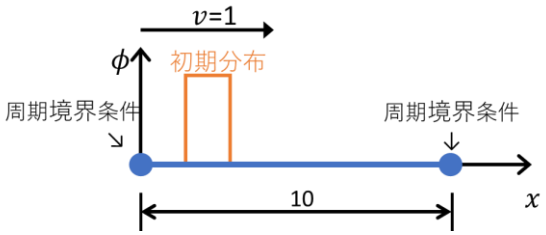
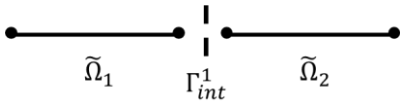
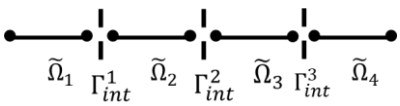


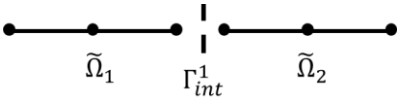
図 2：解析モデル



(a) DG



(b) DG(h)



(c) DG(p)

図 3：比較するモデル

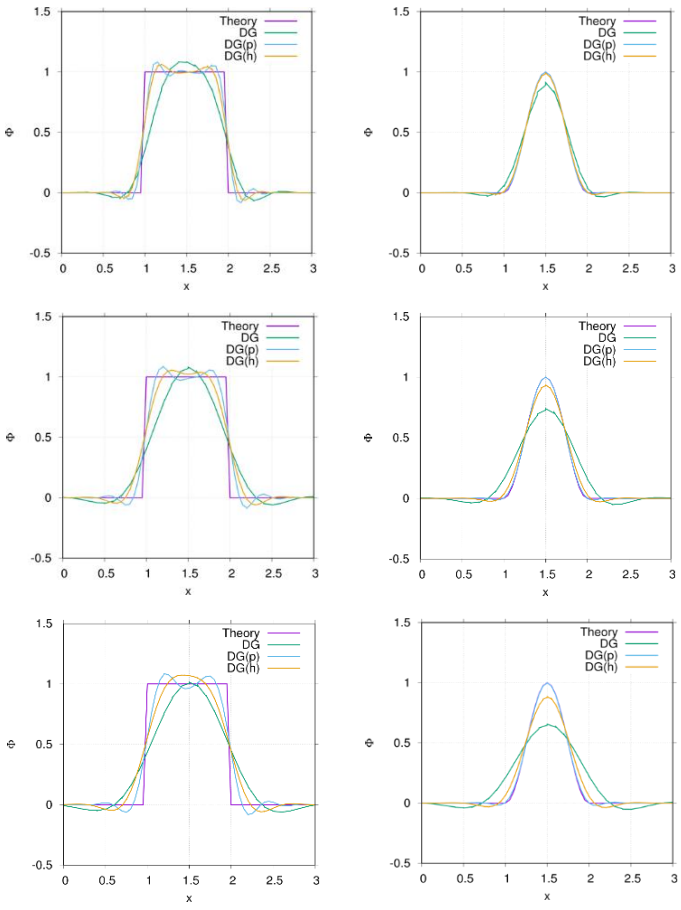
4. おわりに

本研究では Adaptive DG 法で h 法と p 法のどちらが優位であるかの比較を行った．長時間の解析では，h 法に比べて，p 法では精度良く分布形状を維持することを確認できた．今後は，本手法を多次元化し，自由表面流れ解析に適用する．

参考文献

[1] 日本計算工学会編：第 3 版 有限要素法による流れのシミュレーション,5 章,2017.

[2] 田中聖三，高瀬慎介：界面捕捉法に基づく自 由表面流れ解析手法のための Discontinuous Galerkin 法の検討，応用力学論文集,Vol.20，土木学会,73 巻 2 号, pp.273-281,2017.



(a) 連続関数　　(b) 不連続関数

図 4：各時刻におけるϕの分布
(上から t = 10, 50, 100)

© Japan Society of Civil Engineers