

地下水浸透流有限要素解析における揚水／注水の任意メッシュ対応点源モデル（その2）

清水建設 正 ○櫻井英行・正 山田俊子

1. はじめに

著者らは、有限要素法（FEM）浸透流解析において、ボーリング孔による揚水／注水（以降、注水）を点源列としてモデル化する場合の高精度で簡便な方法を提案してきた^{1)ほか}．単に注水孔を圧力規定の点源列としてモデル化すると、孔径は点源に連結する要素サイズに応じた大きさとなり、実際の径とは異なるボーリング孔をモデル化することになる．これに対する著者らの方法は、FEM 方程式から、ある節点に集まる流量を求め、孔近傍の理論解と一致するように要素の透水係数を補正する方法である．要素の透水係数の補正だけでなく、既存プログラムへの実装や解析の前後処理として利用可能な実用性の高い方法である．さらに、FEMの最大の利点である複雑形状への順応性を活かすため、任意分割の三次元メッシュに適用可能なモデルも提案した²⁾．本稿では、これまでの任意メッシュ対応モデルが注水区間の上下に不透水層が存在するような円筒状の二次元放射状流に限られていたのに対し、パッカー等で仕切られた区間の注水にも対応できるように拡張したモデルを報告する．

以降、モデルの数理と計算方法の概要、並びに数値実験による精度の検証を行った結果を示す．

2. 点源の相当半径補正式の導出

三次元定常浸透流問題を考える．FEM における各要素の方程式は次のように記述できる．

$$\sum_{j=1}^{N^e} (C_{ij}^e \phi_j^e) + q_i^e = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N^e, \quad j = 1, 2, \dots, N^e \quad (1)$$

ここで、 e は要素に関するインデックス、 C_{ij}^e 、 N^e 、 ϕ_j^e 、 q_i^e はそれぞれ要素 e の係数行列、構成節点数、構成節点 j の水頭値、構成節点 i の流量値である．

図1にパッカーで仕切られた注水区間近傍の流れ場とパッカー近傍のメッシュ分割の模式図を示す．点源周りのメッシュは、解の悪化を避けるため、質の良いメッシュ分割が行われるとすると、点源と繋がる全有限要素（連結要素）の構成節点のうち、点源を除く節点（至近節点）は、概ね点源から等距離にあり、水頭値には大差がないと仮定できる．したがって、

$$\phi_j^e \cong \bar{\phi}_s, \quad \forall j \in \mathbf{N}_w \quad (2)$$

$\mathbf{N}_w$ は、ある点源 w の連結要素群の至近節点の集合、 $\bar{\phi}_s$ は $\mathbf{N}_w$ に属する至近節点の平均的な水頭値である．

式(1)において、要素の透水係数 k^e を C_{ij}^e から分離して表記し、要素構成節点の一つが、水頭値 $\hat{\phi}_w$ で規定される点源 w であると、整理すると次式を得る．

$$k^e c_{ww}^e (\bar{\phi}_s - \hat{\phi}_w) = q_w^e \quad (3)$$

一つの要素の構成節点の複数が点源となる場合も式(3)と同様に記述できるので、ある点源 w に集まる流量 Q_w は、次のように記述できる．

$$Q_w = \sum_{e \in \mathbf{E}_w} q_w^e = (\bar{\phi}_s - \hat{\phi}_w) \sum_{e \in \mathbf{E}_w} (k^e c_{ww}^e) \quad (4)$$

ここで、 $\mathbf{E}_w$ は点源 w の連結要素の集合である．

3. パッカー式注水区間近傍の流れ場

本手法では、図1に示すパーカーで仕切られた注水区間近傍の流れ場を次のように近似する．

(a)両端部：端部を中心点とした半球放射状流

(b)端部以外：孔の中心線を軸とした円筒放射状流

ここで、ある点源 w からその至近節点まで距離の平均を $\bar{R}$ とし、次の境界条件を導入する．

$$\phi = \hat{\phi}_w \quad \text{at } r = r_w, \quad \phi = \bar{\phi}_s \quad \text{at } r = \bar{R} \quad (5)$$

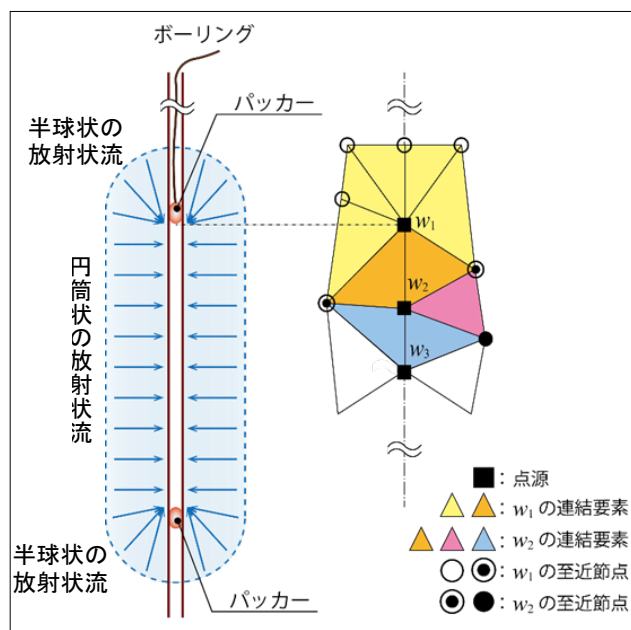


図1 パッカー式揚水近傍の流れ場とメッシュ

キーワード: 浸透流解析, 有限要素法, 点源, 任意メッシュ, 非構造格子, 揚水・注水

連絡先: 〒135-8530 東京都江東区越中島 3-4-17 清水建設(株)技術研究所 TEL(03)3820-8419

三次元と二次元の極座標における定常浸透流の基本解に境界条件式(5)を用いるとそれぞれ次式が得られる。

$$Q_{\text{sph}} = 4\pi k(\bar{\phi}_s - \hat{\phi}_w)(r_w^{-1} - \bar{R}_{\text{sph}}^{-1})^{-1} \quad (6)$$

$$Q_{\text{cyl}} = 2\pi k D_w(\bar{\phi}_s - \hat{\phi}_w) \left[\ln(\bar{R}_{\text{cyl}} / r_w) \right]^{-1} \quad (7)$$

ここで、 D_w は点源 w が占有する孔の長さであり、点源 w に繋がる上下の点源間の距離の1/2である。 $\bar{R}$ の添え字は、球座標系と円筒座標系を表す。

4. 連結要素の透水係数の補正

上述の仮定(a)(b)に基づき、式(4)の点源流量と式(6)、(7)の関係を導く。両端部の点源(図1の w_1)では、

$$Q_w = 0.5Q_{\text{sph}} + Q_{\text{cyl}} \quad (8)$$

$$\tilde{k}_w^e = B_{\text{tip}} k^e \quad (9)$$

$$B_{\text{tip}} = \sum_{e \in E_w} \frac{2\pi}{(c_{ww}^e)} \left[(r_w^{-1} - \bar{R}_{\text{sph}}^{-1})^{-1} + D_w \left[\ln(\bar{R}_{\text{cyl}} / r_w) \right]^{-1} \right] \quad (10)$$

ここで、 $\tilde{k}_w^e$ は注水区間至近の流動場を再現しうるように補正した点源 w の連結要素の透水係数、 B_{tip} は補正係数である。同様に端部以外では、

$$Q_w = Q_{\text{cyl}} \quad (11)$$

$$\tilde{k}_w^e = B_{\text{flank}} k^e \quad (12)$$

$$B_{\text{flank}} = \sum_{e \in E_w} \frac{2\pi}{(c_{ww}^e)} D_w \left[\ln(\bar{R}_{\text{cyl}} / r_w) \right]^{-1} \quad (13)$$

要素が二つの点源(点源 w とその上下のいずれか)に連結している場合は、各点源で得られる補正係数の平均を用いてその要素の透水係数を補正する。

5. 数値実験による検証

図2に示すような領域の中心に孔径100mm、水頭値100m、区間長10mの注水区間が存在する円筒領域の問題により、本手法の検証を実施した。上部境界面には、圧力規定で動水勾配を与えている。軸対称問題ではあるが、任意メッシュでの検証を行うため、1/4を解析領域とした。注水は、図中に●で示す5節点に全水頭100mを与えて点源としてモデル化した。メッシュパターンの影響をみるため、概ね均等に分割したメッシュAと注水区間から遠ざかるにつれて粗くなるメッシュBの二つで検証した。正解に代わる参照解として、孔を径100mmの空洞としてモデル化し、壁面に水頭値100mを与えて、注水区間近傍を5mmで分割した非常に細かいメッシュによる軸対称解析の結果を用いた。

図3は、 $z=0$ を通る $r\theta$ 平面上での全水頭値の分布である。点源の連結要素の透水係数を補正した●と▲の本手法の結果は実線の参照解と良い一致を示している。

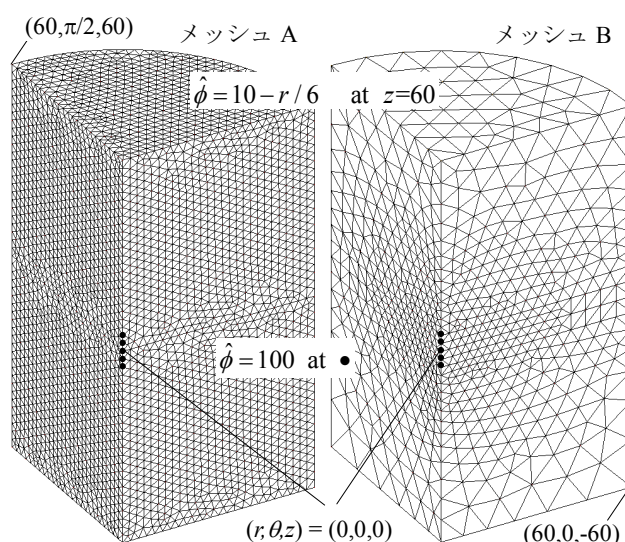


図2 検証問題 (単位: m)

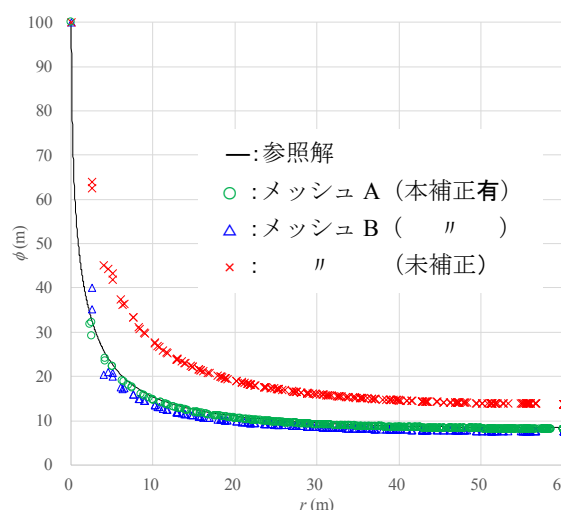


図3 全水頭分布 ($z=0$ の $r\theta$ 平面上)

一方、×の未補正の結果は大きく外れていることが分かる。注水流量を算出すると、補正有の場合、メッシュAで参照解との誤差が6.0%、メッシュBでは14.4%となった。これは、メッシュBの場合、式(5)の $\bar{R}$ を求める際の点源と至近節点とのバラつきが大きいためと考えられる。なお、未補正の流量誤差は100%を超えた。

6. おわりに

FEM 浸透流解析において、パッカー式注水を点源としてモデル化するための任意メッシュに対応した方法を提案し、その有効性を示した。紙面の都合で割愛したが、本手法は、四面体だけでなく五面体、六面体要素のメッシュでも有用性を検証済みである。

参考文献

- 1) 山田ら: 有限要素法を用いた浸透流解析における注水・揚水孔の実用的な簡易モデル, 土木学会論文集 C-71-4, 407-417, 2015.
- 2) 櫻井ら: 地下水浸透流有限要素解析における揚水/注水の任意メッシュ対応点源モデル, 土木学会会第73回年次学術講演会 CS7-026, 51-52, 2018.