

流水型漏刻システムに関する簡易水理モデルの近似解

京都大学 フェロー ○細田 尚
建設技術研究所 非会員 宗 暘
京都大学 正会員 小森 直人

1. はじめに

本研究は、図-1 に示したような流水型漏刻システムの挙動を再現するための簡易な水理モデルを取り上げ、その基礎式系の近似解の誘導を試みたものである。McNown¹⁾は水槽からの流出速度にトリチェリの定理を適用した水槽の連続式で構成される水理モデルに対して、流出流速の項の水深を初期水深のまま変化しないと仮定した近似解を導出している。本研究ではこの仮定を用いずに水理モデルの近似解の導出を行う。

2. 流水型漏刻の簡易水理モデル

本研究では図-1 に示した水槽の内、1 段目と 2 段目のみを考える。1 番目の水槽の出口管路の高さから計った初期水位を H 、各水槽の水位を h_1 , h_2 、円形水槽の断面積を A 、流出管の断面積を a として、流出管の流速をトリチェリの定理で評価すれば、各水槽の連続式は式(1), (2)となる。

$$(1 \text{ 段目}) \quad \frac{d}{dT}(h_1') = -\sqrt{h_1'} \quad (1)$$

$$(2 \text{ 段目}) \quad \frac{d}{dT}(h_2') = \sqrt{h_1'} - \sqrt{h_2'} \quad (2)$$

ここに、 i 番目の水槽の無次元水位を $h_i' \equiv h_i/H$ と置いている。また、

T は無次元時間 $T = \frac{a}{A} \sqrt{\frac{2g}{H}} t$ である。

3. 近似解の導出

まず最上段の初期水位を H とすると水位が出口管路高さまで低下する間の無次元水位と無次元時間の関係は次式となる。

$$h_1' = \left(1 - \frac{T}{2}\right)^2 \quad (3)$$

後述の水理実験に対応するように、 h_1' がゼロになった時に水槽 1 に水を供給し h_1' が瞬間的に 1 に戻る場合を考える。このように水槽 1 に間欠的な給水を周期的に繰り返す場合、水槽 2 には周期 $T = 2$ で $1 - T/2$ の流入が繰り返されることになる。本研究ではこの周期的流入条件と初期条件 $h_2' = 0$ の下で、1 周期目の水槽 2 の水位時間変化に関する近似解を導出する。

式(3)を式(2)に代入して二乗すると式(4)になる。

$$h_2' = \left(1 - \frac{T}{2}\right)^2 - 2\left(1 - \frac{T}{2}\right) \frac{dh_2'}{dT} + \left(\frac{dh_2'}{dT}\right)^2 \quad (4)$$

h_2' の解として式(5)で表される $T^{1/2}$ に関するべき乗展開を仮定する。これは、式(4)の考察から分かるように $T = 0$ において h_2' の時間に関する 2 階微係数が無限大になるため、単なる T のべき乗展開では $h_2' = 0$ から始まる解の挙動を表すことができないためである。

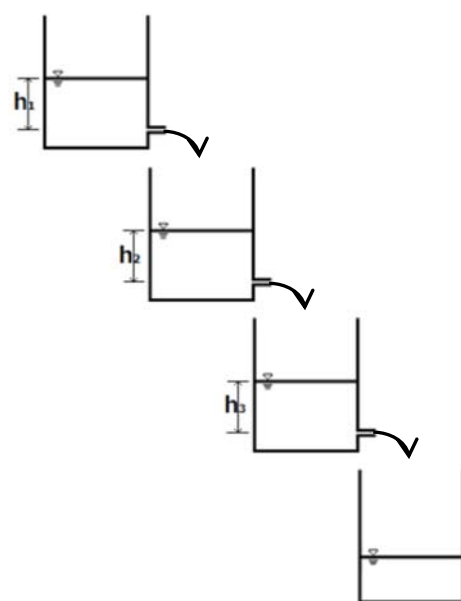


図-1 流水型漏刻の概念図

キーワード 漏刻, 管路非定常流, 常微分方程式

連絡先 〒615-8540 京都市西京区京都大学桂 C1-3 号棟 京都大学工学研究科都市社会工学専攻

Tel. 075-383-3266 e-mail: hosoda.takashi.4w@kyoto-u.ac.jp

$$h_2' = 0 + \beta_{2,1}T + \beta_{2,3}T^{\frac{3}{2}} + \beta_{2,2}T^2 + \beta_{2,5}T^{\frac{5}{2}} + \beta_{2,3}T^3 + \beta_{2,7}T^{\frac{7}{2}} + \beta_{2,4}T^4 + \beta_{2,9}T^{\frac{9}{2}} + \beta_{2,5}T^5 \quad (5)$$

式(5)を式(4)に代入して $T^{1/2}$ に関するべき乗の係数をゼロと置くと、式(5)中の係数を計算することができる。計算結果を示せば式(6)となる。

$$\beta_{2,1} = 1 \quad \beta_{2,3} = -\frac{2}{3} \quad \beta_{2,2} = -\frac{1}{12} \quad \beta_{2,5} = \frac{7}{180} \quad \beta_{2,3} = \frac{7}{1620} \quad \beta_{2,7} = \frac{17}{8640} \quad \beta_{2,4} = \frac{5}{7776} \quad (6)$$

図-2 に式(5)を示した。考慮する項数が増加するに従い、解は収束していくことが確認できる。

4. 水理実験の概要及びその結果と近似解との比較

図-3 に示した3個の水槽を有する漏刻模型を作成し、水理実験を実施した。図-4 に各水槽水位の時間変化を示した。この第1周期目の第1と第2水槽の水位時間変化と式(3)及び(5)を図-5 に示した。第1水槽、第2水槽ともに両者はよく一致している。

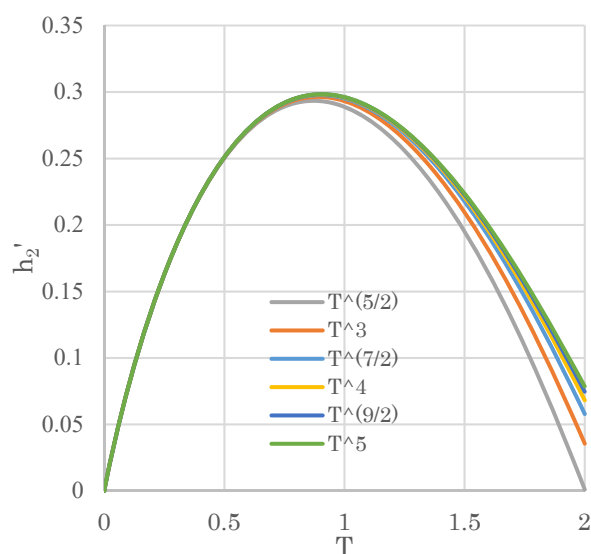


図-2 h_2' の解の収束過程



図-3 漏刻の水理実験装置

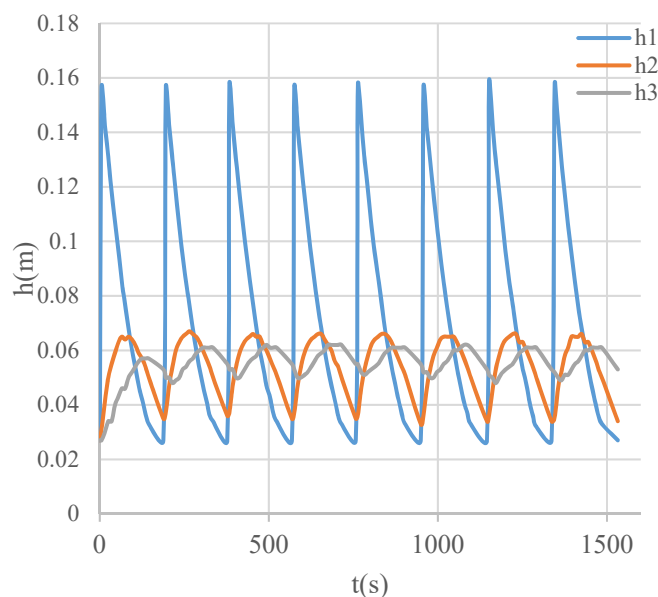


図-4 第1～3水槽の水位の時間変化

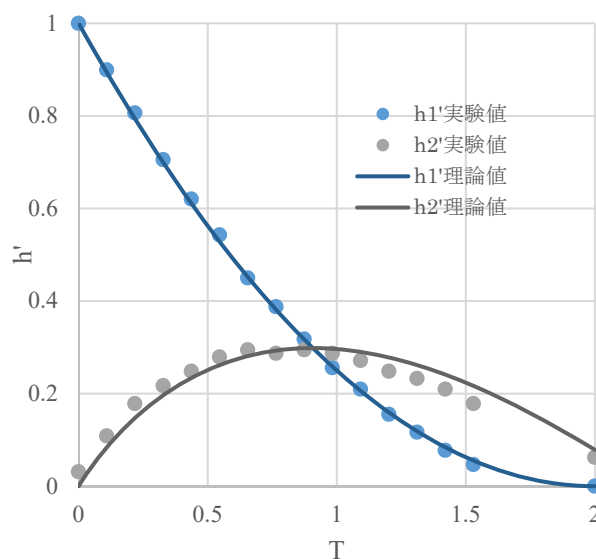


図-5 実験結果と近似解の比較

5. おわりに

本研究では第1周期目のみを取り扱ったが、今後、平衡状態に至る過程についての解析を行いたい。

[参考文献] 1) McNown, J. S., When time flowed -The Story of the Clepsydra-, La Houille Balanche, 5, pp.347-353, 1976.