介在物形状の空間的ばらつきを考慮した均質化拡散係数を用いたスペクトル確率有限要素解析法

新潟大学工学部工学科（社会基盤）　正会員　紅露 一寛
新潟大学工学部工学科（社会基盤）　正会員　阿部 和久
新潟大学工学部学生（研究当時）　非会員　浅井 洸太朗

1. はじめに

今日に至るまで，土木工学に限らず，構造部材の高機能化のために異種材料を組み合わせた複合材料が数多く開発され，実用化されている．これらの多くは，構造部材としての寸法に比して介在物の代表寸法が小さく，一般的な構造解析手法では計算負荷が非常に大きいため，何らかの「平均化・均質化」を行った上で解析計算を行うことが多い．

均質化法[1]は，微視的な非均質性を有する材料の力学特性を数学的に合理的な方法で平均化し，微視構造が力学特性に及ぼす影響を代表体積要素における力学挙動を評価することで実現する方法である．文献[2]では介在物形状の不確実性に起因する均質化拡散係数への影響を考察している．

そこで本研究では，文献[2]の研究成果をもとに，物質拡散問題において，介在物形状の空間的ばらつきを考慮して得られる均質化拡散係数を用いたマクロスケール解析法を，スペクトル確率有限要素法を用いて構成する．

2. 均質化法の定式化

図 1 に示すような, 領域 Ω, 境界 Γ を有する不均質媒体中の物質拡散について考える．

Ω の不均質性は, 図 2 に示したユニットセルで例示される微視構造が，物体 Ω 内に周期的に配置されるものと仮定し，ユニットセルにおける位置ベクトル $\boldsymbol{y}$ が実スケール $\boldsymbol{x}$ との間に $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}/\varepsilon$ なる構造を有するものとする．拡散問題においては，濃度 C がスケール比 ε の漸近展開で記述できるものとして支配方程式を整理し，項別収束の条件を課す．その結果実スケールにおける初期値・境界値問題は次式で与えられる．

$$\frac{\partial C^0}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x_i}\left[K^*_{ik}\frac{\partial C^0}{\partial x_k}\right]=f \qquad (\text{in }\Omega) \tag{1}$$

$$C^0=\bar{C}^0 \qquad (\text{on }\Gamma_C) \tag{2}$$

$$K^*_{ik}\frac{\partial C^0}{\partial x_k}n_i=\bar{\phi} \qquad (\text{on }\Gamma_\phi) \tag{3}$$

$$C^0=\bar{C}_{init} \qquad (\text{in }\Omega) \tag{4}$$

ここで C^0 はマクロ濃度，f はソース,Γ_C,Γ_ϕ は部分境界であり, $\bar{}$ は既知量であることを表す .K^*_{ik} は均質化拡散係数テンソルであり, 文献[1]の方法で介在物形状の空間的ばらつきを考慮した場合, 次式の Polynomial chaos(PC) 展開で記述される．

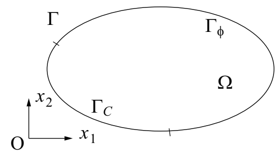

図 1 マクロスケールの解析領域

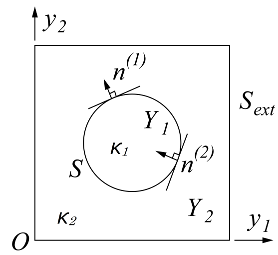

図 2 ユニットセル

$$K^*_{ik}=\sum_{l=0}^{N_{PC}}K^{*(l)}_{ik}\Psi_l(\boldsymbol{\sigma}) \tag{5}$$

ここで，$K^{*(l)}_{ik}$ は PC 展開係数，Ψ_l は Polynomial chaos，$\boldsymbol{\sigma}$ は確率変数である．

3. マクロスケール問題の確率有限要素法

式 (1)–(5) の問題を解くために，確率有限要素法を用いる．式 (1) を出発点に重み付き残差法を適用し, 得られた式に式 (5) を代入すると次式を得る．

$$\int_\Omega\frac{\partial C^0}{\partial t}w_c d\Omega+\int_\Omega\left(\sum_{l=0}^{\tilde{N}_{PC}}K^{*(l)}_{ik}\Psi_l(\boldsymbol{\sigma})\right)\frac{\partial C^0}{\partial x_k}\frac{\partial w_c}{\partial x_i}d\Omega =\int_{\Gamma_q}(\phi_i n_i)w_c d\Gamma+\int_\Omega f w_c d\Omega \tag{6}$$

ここで,w_c は重み関数であり,w_c と濃度 C^0 に有限要素近似を導入して実空間の離散化を行うと

$$\{\boldsymbol{w_c}\}^T[\boldsymbol{M}]\{\dot{\boldsymbol{C}}^0\}+\sum_{l=0}^{N_{PC}}\Psi_l(\boldsymbol{\sigma})\{\boldsymbol{w_c}\}^T[\boldsymbol{K}^{(l)}]\{\boldsymbol{C}^0\} =\{\boldsymbol{w_c}\}^T\{\boldsymbol{f}\} \tag{7}$$

となり, さらに C^0 の節点値ベクトル $\{\boldsymbol{C}^0\}$ を次式の PC 展開で表現しておく．

$$\{\boldsymbol{C}^0\}=\sum_{m=0}^{\tilde{N}_{PC}}\Psi_m(\boldsymbol{\sigma})\{\boldsymbol{C}^0_m\} \tag{8}$$

式 (8) の Ψ_m を重みとして期待値をとると，式 (7) において

Key Words: 均質化拡散係数，介在物形状の空間的ばらつき，スペクトル確率有限要素法
連絡先：〒 950-2181　新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地　TEL: 025(262)7274，FAX: 025(262)7274

次の連立微分方程式を得る.

$$\sum_{m=0}^{\tilde{N}_{PC}} \langle \Psi_m \Psi_\alpha \rangle [\mathbf{M}] \{ \dot{\boldsymbol{C}}^0 \} + \sum_{m=0}^{\tilde{N}_{PC}} \sum_{l=0}^{N_{PC}} \langle \Psi_m \Psi_l \Psi_\alpha \rangle [\boldsymbol{K}^{(l)}] \{ \boldsymbol{C}_m^0 \} = \langle \Psi_\alpha \rangle \{ \boldsymbol{f} \} \tag{9}$$

ただし，$\alpha = 0, 1, \ldots, \tilde{N}_{pc}$ である．式 (9) を直接時間積分すれば，各時刻における C^0 が評価できる．C^0 の期待値と標準偏差は次式で求められる．

$$\langle \{ \boldsymbol{C^0} \} \rangle = \{ \boldsymbol{C}_0^0 \}, \quad \sigma_{\boldsymbol{C}} = \left[\sum_{m=1}^{\tilde{N}_{PC}} (\boldsymbol{C}_m^0)^2 \right]^{1/2} \tag{10}$$

4.　提案手法の妥当性

提案手法の妥当性を検証するために, 図 3 の例題に対して本手法を適用し, 濃度の期待値及び標準偏差について検討する.

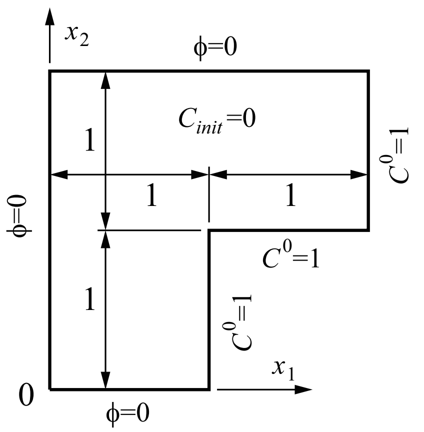

図 3 対象とする初期値境界値問題

対象領域における不均質性は図 2 の 2 次元ユニットセルで代表でき, 介在物半径の平均値は $\bar{R} = 0.2$, 変動係数 δ_R は 10%, 半径の共分散関数は次式で与えられる.

$$C(\theta_1, \theta_2) = (\delta_R \bar{R})^2 \exp\left[-\frac{d(\theta_1, \theta_2)}{b} \right]$$
$$d = \min\{|\theta_1, \theta_2|, 2\pi - |\theta_1, \theta_2|\}, b = 1/2\pi \tag{11}$$

式 (11) を核関数とした固有値問題の固有値 λ_k, 固有関数 q_k を用いた Karhunen-Loeve 展開によって介在物半径の空間的ばらつきをモデル化する.

$$R(\theta, \boldsymbol{\sigma}) = \bar{R} + \sum_{k=1}^{N_{KL}} \sigma_k \sqrt{\lambda_k} q_k(\theta) \tag{12}$$

なお,$N_{KL} = 5$ としている.

式 (6) の離散化には三角形一次要素を用い, PC 展開の次数は 1 次とした. 式 (9) の時間積分は 4 次の Runge-Kutta 法を適用し, 解析では式 (7) の行列 $[\boldsymbol{M}]$ を対角化して用いた. そのため, 今回の解析では時間積分は陽的に処理している.

図 3 の問題における $t = 0.08$ での濃度 C^0 の期待値 $\langle C^0 \rangle$ および標準偏差 σ_{C^0} の分布を図 4 に示す. なお, 比較のために式 (5) の均質拡散係数を正規乱数で生成し, モンテカルロシミュレーション (MCS) により得られた期待値・標準偏差の分布も図 5 に示す.

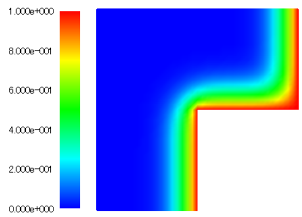

図 4-a　(a)$\langle C^0 \rangle$

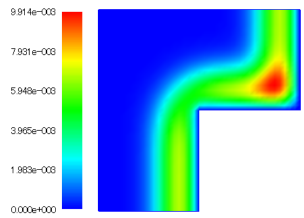

図 4-b　(b)σ_{C^0}

図 4　領域内での $\langle C^0 \rangle$ と σ_{C^0} の分布 (提案手法を適用,$t = 0.08$)

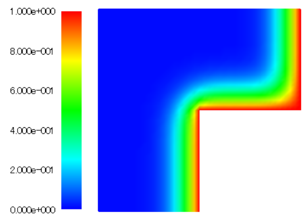

図 5-a　(a) $\langle C^0 \rangle$

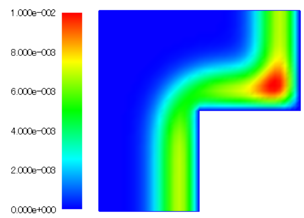

図 5-b　(b) σ_{C^0}

図 5　領域内での $\langle C^0 \rangle$ と σ_{C^0} の分布 (MCS,$t = 0.08$)

解析結果より, 均質化した物性が概ね等方的であることと, 濃度規定値を Γ_C 上で一様に与えていることもあって, 濃度 C^0 の期待値は $C^0 = 1$ なる境界条件設定辺からの距離でその大きさが概ね定まる分布となっており,SSFEM,MCS のいずれを用いても同様の結果となっている. 一方,C^0 の標準偏差は濃度勾配が大きくなるところや領域右上の凸部で著大となっており,SSFEM によって十分な精度で評価できることが分かる. なお,$N_{KL} = 5$,PC 展開次数 1 次に設定した場合, SSFEM での 1 ステップでの計算負荷は MCS の 17 倍となるが,MCS におけるサンプル数の設定いかんでは, 本手法の適用によって計算の効率化も期待できる.

参考文献

1) Matine,A.,Boyard,N.,Legrain,G.,Jarny,Y.,Cartraud,P.: Transient heat conduction within periodic heterogeneous media: A space-time homogenization approach.,Int.J.Thermal Sci.,Vol.92,pp.217-229,2015.
2) 紅露一寛, 阿部和久:均質化拡散係数における介在物形状の空間的ばらつきの影響評価のためのスペクトル確率有限要素法, 第 21 回応用力学シンポジウム講演概要集,2018.