

有限要素法を用いたCFRP平板に対する 分散曲線の導出

○群馬大学大学院理工学府 学生会員 石黒明日海
群馬大学大学院理工学府 学生会員 金子龍之介
群馬大学大学院理工学府 正会員 斎藤隆泰

1. はじめに

近年、平板やパイプ等の長尺材料に対してガイド波を用いた非破壊検査手法の開発に注目が集まっている。ガイド波を用いた検査では長距離伝搬が可能なことから、長尺材料の検査の効率化を図れる半面、多モード性や分散性があるため、波動伝搬が複雑化し、非破壊検査を難しくするといった欠点がある。特に、軽量かつ高強度なCFRP(Carbon Fiber Reinforced Plastic)においては、強い音響異方性を示すため、波動伝搬特性はさらに複雑となる。そこで本研究では、CFRP 平板に対する分散曲線を数値的に求める方法について検討する。以下では、分散曲線と本研究で用いる有限要素法(FEM)について説明した後、数値解析例を示すことで、結果の妥当性について検討する。

2. 分散曲線について

分散曲線とは、材料中で複数派生する伝搬モードの分散性を追跡する曲線である。図1のようなCFRP 平板を考える。平板中を伝搬する超音波は、平板上下の境界面で反射を繰り返すため、分散性を示す¹⁾ことが知られている。そのため、複数の伝搬モードが派生し、これらは周波数や板厚に依存する。分散曲線の一種である位相速度曲線は、超音波探傷検査に直接使われることは少ないものの、特定の臨界角で超音波を入射すると、特定の伝搬モードを効果的に励振、受信できる。また、内部欠陥が検出されると、材料中での伝搬速度に変化が生じるため、分散曲線が解析で事前に得られた分散曲線と異なる傾向を示す。そのため正しく分散曲線を描ければ、効果的かつ定量的に欠陥位置を推定できる可能性がある。

3. 分散曲線の導出

本節では、分散曲線の導出方法について述べる。図1のような平板モデルのA点に入射角 θ で超音波を送信する場合を考える。この時、観測点での変位 $u_i(\mathbf{x}, t)$ が求まれば、分散曲線は次の二次元(時空間)フーリエ変換により、波数-周波数空間で求めることができる。

$$F(k, f) = \int \int u_i(x_1, t) e^{-2\pi(kx_1 + ft)i} dx_1 dt \quad (1)$$

ここで、 k は波数、 f は周波数、 x は座標空間、 t は時間を表している。その際、使用する変位 $u_i(\mathbf{x}, t)$ が、水平変位 $u_1(x, t)$ ならば対称モードの分散曲線、鉛直変位 $u_3(x, t)$ ならば非

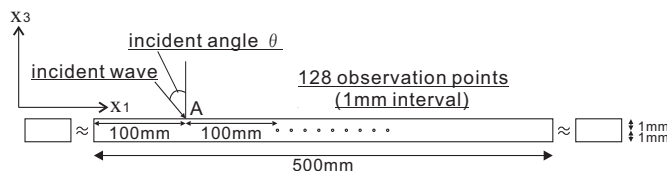


図1 平板に対する有限要素解析モデル

対称モードの分散曲線を描くことができる。以上により、波数 k と周波数 f の、変位を用いた分散曲線が得られる。また、入射波の中心周波数付近に時空間スペクトルが算出されるため、入射波の中心周波数を適宜変更することによって、必要な帯域部分の分散曲線を描くことができる。なお、分散曲線の導出に用いる変位 $u_i(\mathbf{x}, t)$ の算出には有限要素法を用いる。よって、以下では有限要素法の定式化について述べる。

4. 有限要素法の定式化

弾性波変位 $u_i(\mathbf{x}, t)$ は位置 $\mathbf{x}$ 、時刻 t において、物体力を無視すると、次の運動方程式と構成式を満足する。

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{x}, t) = \rho \ddot{u}_i(\mathbf{x}, t) \quad (\text{運動方程式}) \quad (2)$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = C_{ijkl} u_{l,k}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{構成式}) \quad (3)$$

ここで、 ρ は弾性体の密度、 $\{\cdot\}$ は時間微分、 $\{\cdot\}_{,i}$ は空間微分 $\partial/\partial x_i$ を表す。また、 C_{ijkl} は弾性定数を表す。変位 $u_i(\mathbf{x}, t)$ を求める数値解析手法には Galerkin 法を用いた有限要素法²⁾を用いる。式(2)の運動方程式に式(3)の構成式を代入し、アイソパラメトリック四辺形一次要素を用いて、解析領域の空間離散化を行う。形状関数 $N_\alpha (\alpha = 1, \dots, 4)$ を重み関数として乗じた後、要素 e の領域 v_e で積分すると、離散化された次の式を得る。

$$\sum_{e=1}^m \int_{v_e} N_\alpha (C_{ijkl} u_{l,kj} - \rho \ddot{u}_i) dv = 0 \quad (4)$$

ここで、 m は全有限要素数である。弱形式化を行うために Gauss-Green の定理を用いると、次の関係が成り立つ。

$$\int_{v_e} N_\alpha u_{l,kj} dv^e = \int_{S_e} N_\alpha u_{l,j} n_k dS^e - \int_{v_e} N_{\alpha,k} u_{l,j} dv^e \quad (5)$$

ただし、 S_e は要素 e の境界であり、 n_i は境界上の単位法線ベクトルの成分である。式(4)に式(5)を代入し、整理する

Key Words: 有限要素法, ガイド波, 分散曲線, CFRP

〒376-8515 群馬県桐生市天神町 1-5-1

と次の空間離散化運動方程式を得る.

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^m \sum_{\beta=1}^4 \left[\int_{v^e} C_{ijkl} N_{\alpha,k} N_{\beta,j} dv u_{i\beta}^e \right] \\ + \sum_{e=1}^m \sum_{\beta=1}^4 \left[\int_{v^e} \rho N_{\alpha} N_{\beta} dv \ddot{u}_{i\beta}^e \right] \\ - \sum_{e=1}^m \sum_{\beta=1}^4 \left[\int_{S^e} N_{\alpha} N_{\beta} dS t_{i\beta}^e \right] = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

ここで, 式 (6) をマトリクス表示すると

$$[K]\{u_i\} + [M]\{\ddot{u}_i\} - \{T_i\} = 0 \quad (7)$$

となる. $[K]$ は全体剛性マトリクス, $[M]$ は全体質量マトリクス, $\{u_i\}$ は節点変位ベクトル, $\{T_i\}$ は表面力ベクトルを表す. 次に, 式 (7) 左辺第二項における $\{\ddot{u}_i\}$ を中心差分で近似すると以下の式を得る.

$$\{\ddot{u}_i\} = \frac{\{u_i\}_{n-1} - 2\{u_i\}_n + \{u_i\}_{n+1}}{(\Delta t)^2} \quad (8)$$

ここで, Δt は時間増分である. 式 (7) に式 (8) を代入した後, 式 (7) を陽解法で解くために, $[M]$ に集中化を施し, $[M]$ を対角行列と仮定すると, 第 $n+1$ ステップにおいて, 式 (7) は以下のように表せる.

$$\begin{aligned} \{u_i\}_{n+1} = & -[(\Delta t)^2[M]^{-1}[K] + 2[E]]\{u_i\}_n \\ & -\{u_i\}_{n-1} + (\Delta t)^2[M]^{-1}\{T_i\} \end{aligned} \quad (9)$$

ここで, $[E]$ は単位行列である. 式 (9) に初期条件を代入し, 逐次的に解くことで第 n ステップにおける変位 $\{u_i\}_n$ を得ることができる.

5. 数値解析例

以下, 数値解析例を示す. 超音波伝搬解析において, 図1の解析モデルを有限要素数 $m=1200000$ のピクセル要素で離散化し, 時間増分 $\Delta t=1.0\text{ns}$, 板厚を 2.0mm とし, モデルの長さは分散曲線を描くために, 平板端からの反射波が観測点の変位に影響しないよう解析した. また, 材質は一方向 (0°) CFRP とし, 弾性定数は, 以下の IM7/977-3 ラミネートに対する弾性定数を使用した.

$$C_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 178.2 & 8.347 & 8.347 & 0 & 0 & 0 \\ 8.347 & 14.44 & 8.119 & 0 & 0 & 0 \\ 8.347 & 8.119 & 14.44 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.161 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.1 \end{bmatrix} \quad [\text{GPa}] \quad (10)$$

解析モデル表面の境界条件は表面力フリーとし, 式 (9) において $\{T_i\} = 0$ とした. また, 入射波は中心周波数 0.5MHz のリッカー波一波を A 点より入射し, 図1に示すように A

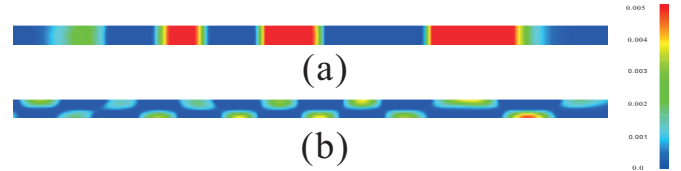


図2 有限要素法による解析結果, (a) 対称モード (u_1 をプロット), (b) 非対称モード (u_3 をプロット)

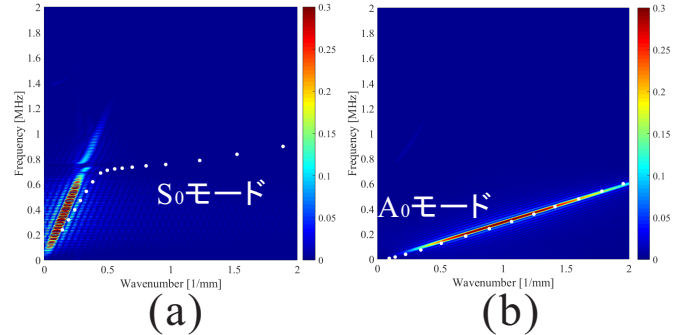


図3 分散曲線, (a) 対称モード, (b) 非対称モード

点から 100mm の位置より 1mm 毎に 128 点の観測点で変位 $u_i(\mathbf{x}, t)$ を出力した. 入射角 θ は, $\theta = 54.83^\circ$ とした. 図2に有限要素法解析で得られた波動伝搬挙動を示す. 図2より, 板厚の中心軸に対して, (a) 対称モードでは変位 u_1 の大きさが対称であり, (b) 非対称モードでは変位 u_3 の大きさは非対称であることが確認できる. また, 図3(a), (b) に式 (1) を計算することで得られた, 対称モード, 非対称モードの分散曲線と位相速度曲線を変換することで得られた分散曲線 (白丸印) を比較した結果を示す. A_0 (非対称) モードを卓越させるような入射角と中心周波数を与えたが, S_0 (対称) モードも卓越していることが分かる. 送信波の周波数帯域は 0.5MHz 前後であり, 対称モード, 非対称モードともに時空間スペクトルは, 0.5MHz 付近にプロットされていること, また, 位相速度曲線を変換することにより求められた分散曲線と概ね一致していることから, 有限要素法による二次元波動伝搬解析結果を用いて二次元 (時空間) フーリエ変換により得られた分散曲線は, 妥当であると言える.

6. 結論と今後の課題

有限要素法を用いて平板中を伝搬する二次元波動伝搬解析と, その結果を用いた分散曲線の導出を行った. 数値解析結果より, 対称モードと非対称モードにおける, 波動伝搬解析によって得られた結果を用いた分散曲線の違いをそれぞれ確認できた. また, 位相速度曲線を変換することによって得られた分散曲線との比較により, 波動伝搬解析結果を用いた分散曲線が妥当であることを確認できた. 今後は, 分散曲線の AE (Acoustic Emission) 法への適用や平板における, 逆散乱解析手法の開発を行う予定である.

参考文献

- 1) J. L. Rose: Ultrasonic waves in solid media, Cambridge, (1999)
- 2) 矢川元基・吉村忍:有限要素法, 培風館, (1991)