非線形境界条件を有する界面での平面波の反射・透過問題の調和バランス法による解析

○東京理科大学　学生会員　米永佳祐
東京理科大学　正会員　丸山泰蔵
東京理科大学　正会員　東平光生

1.　はじめに

構造物の維持管理において，疲労き裂や応力腐食割れといった不連続界面の検出及び計測は重要である．しかしながら，不連続界面が閉口している場合，従来の線形超音波法では，その検出が困難である．その理由は，散乱波の発生が著しく小さく，その計測が困難なためである．そのため，大振幅の入射超音波によってき裂面の開閉や摩擦を伴う滑りを誘発させ，その結果生じる高調波・分調波を受信することによって，閉口き裂の検出及び計測を行う非線形超音波法 [?] が提案されている．

閉口き裂に超音波を照射したときに生じる散乱波は，き裂の形状，き裂面に作用する残留応力などの情報を含んでいる．そのため，き裂が散乱波に及ぼす影響をよく理解することが高精度なき裂の検出及び計測につながる．数値解析を用いた既存の研究として，き裂面の開閉や摩擦をモデル化した境界要素法による散乱解析 [?] が行われてきた．しかし，き裂のサイズと入射波長の関係，及びき裂面の接触の相互作用によって，散乱現象は複雑となる．そこで本論文では，き裂のサイズと入射波長との関係を除外した基本的な現象の理解を目的とし，接触条件を考慮した界面での平面波の反射・透過問題の解析を行う．

2.　解くべき問題

図 1 に示すように，2 つの半無限領域 D^I，$D^{I\!I}$ を隔てる界面 S に対して，領域 D^I から入射波が照射され，反射，透過する問題を考える．図 1 に表される 2 次元直角座標系を考え，界面 S は $y=0$ 平面であるとする．また，領域 D^I，$D^{I\!I}$ は均質，等方，かつ線形な弾性体とし，入射波は時間調和な平面縦波，もしくは横波とする．図 1 中の赤色の矢印は，振動方向を表している．本研究では，界面 S において非線形な境界条件を考慮し，反射波，透過波に高調波成分が含まれる問題を考える．

界面 S は微視的構造として，図 2 に示すような凹凸を有する．しかしながら，入射波の波長が界面 S の凹凸の高さや幅と比較して十分大きいと仮定し，界面 S は平面として考え，単位面積当たりの変位，応力を扱う．以下では，開閉を考慮した界面に一様な静的圧縮応力 $\boldsymbol{\sigma}^{st}$ が作用している状況下での平面波の反射・透過問題を考える．

領域 D^I，$D^{I\!I}$ におけるそれぞれの全変位場を以下のように表す．

$$\mathbf{u}^{I} = \mathbf{u}_{\phi}^{inc} + \mathbf{u}_{L}^{ref} + \mathbf{u}_{T}^{ref} + \mathbf{u}^{I;st} \tag{1}$$

$$\mathbf{u}^{I\!I} = \mathbf{u}_{L}^{tra} + \mathbf{u}_{T}^{tra} + \mathbf{u}^{I\!I;st} \tag{2}$$

ここで，上付き添え字 inc，ref，tra，st はそれぞれ入射波，反射波，透過波，静的な変形を表し，下付き添え字 L，T は，縦波，横波を表している．また，入射波の添え字の ϕ は，L または T をとるものとする．よって，界面 S における開口変位 $[\mathbf{u}]$ は以下のように表される．

$$\begin{aligned}[\mathbf{u}] :&= \mathbf{u}^{I} - \mathbf{u}^{I\!I} \\ &= \mathbf{u}_{\phi}^{inc} + \mathbf{u}_{L}^{ref} + \mathbf{u}_{T}^{ref} - \mathbf{u}_{L}^{tra} - \mathbf{u}_{T}^{tra} + [\mathbf{u}^{st}]\end{aligned} \tag{3}$$

ここで，$[\mathbf{u}^{st}] = \mathbf{u}^{I;st} - \mathbf{u}^{I\!I;st}$ であり，静的な開口変位を示す．また，領域 D^I，$D^{I\!I}$ におけるそれぞれの全応力場を以下のように表す．

$$\boldsymbol{\sigma}^{I} = \boldsymbol{\sigma}^{inc} + \boldsymbol{\sigma}_{L}^{ref} + \boldsymbol{\sigma}_{T}^{ref} + \boldsymbol{\sigma}^{I;st} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{I\!I} = \boldsymbol{\sigma}^{inc} + \boldsymbol{\sigma}_{L}^{tra} + \boldsymbol{\sigma}_{T}^{tra} + \boldsymbol{\sigma}^{I\!I;st} \tag{5}$$

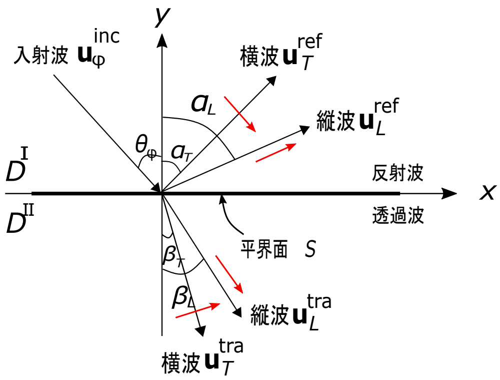

図 1　平面波の反射・透過問題

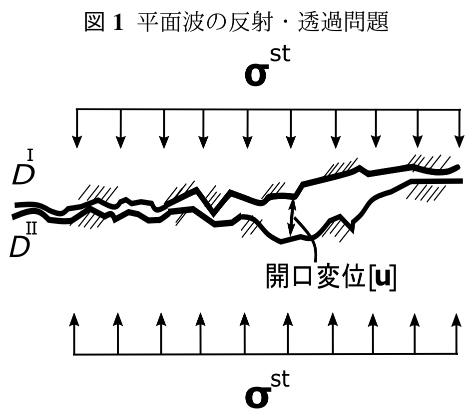

図 2　平界面 S の微視的構造

Key Words: 弾性波，非線形超音波法，調和バランス法
〒 278-8510 千葉県野田市山崎 2641・TEL: 04-7124-1501 (4073)

界面 S における表面力 $\mathbf{t}^{I(II)}(=\hat{\mathbf{y}}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{I(II)})$ は，次式のように連続性を満足する．

$$\mathbf{t}^{I}=\mathbf{t}^{II} \tag{6}$$

そのため，以下では上付き添え字 $I(II)$ を省略し，単に $\mathbf{t}$ と記述する．

本研究では，界面の開閉，及び動摩擦をモデル化した $[\mathbf{u}]$，$\mathbf{t}$ に対する境界条件を用いる．界面が開口している場合，境界条件は次の表面力フリーとなる．

$$\mathbf{t}=\mathbf{0} \tag{7}$$

一方，界面が閉口している場合，法線方向の変位の連続性と接線方向の動摩擦を考慮して，次の境界条件を考える．

$$[\mathbf{u}]\cdot\hat{\mathbf{y}}=0 \tag{8}$$

$$\mathbf{t}\cdot\hat{\mathbf{x}}=-\mu_d(\mathbf{t}\cdot\hat{\mathbf{y}})\mathrm{sgn}([\dot{\mathbf{u}}]\cdot\hat{\mathbf{x}}) \tag{9}$$

ここで，$\hat{\mathbf{x}}$，$\hat{\mathbf{y}}$ はそれぞれ x 軸，y 軸方向の単位ベクトルである．また，$\dot{()}$ は時間微分，μ_d は動摩擦係数である．

3. 解析手法

き裂面での接触を考慮して非線形な反射・透過問題を解くため，調和バランス法 ?) を適用する．入射波は，以下のような平面波とする．

$$\mathbf{u}_\phi^{inc}=\mathbf{d}_\phi\Big[A\cos(-yk_\phi\cos\theta_\phi+xk_\phi\sin\theta_\phi-\omega t)+B\sin(-yk_\phi\cos\theta_\phi+xk_\phi\sin\theta_\phi-\omega t)\Big] \tag{10}$$

ここで，$\mathbf{d}_\phi$ は以下のとおりである．

$$\mathbf{d}_L=-\hat{\mathbf{y}}\cos\theta_L+\hat{\mathbf{x}}\sin\theta_L$$
$$\mathbf{d}_T=\hat{\mathbf{y}}\sin\theta_T+\hat{\mathbf{x}}\cos\theta_T$$

ここで，A，B は振幅に関する実数であり，入射波の振幅を u_0 とすると，$u_0=\sqrt{A^2+B^2}$ となる．ω は入射波の角周波数，k_ϕ は入射波の波数，t は時間である．反射波・透過波は界面の開閉の影響によって入射周波数の整数倍の成分を含んでいることが予想されるため，Fourier 級数で表す．反射波と透過波の縦波成分，横波成分は，次数が N_h までの有限の Fourier 級数によって仮定すると，界面 $S(y=0)$ において以下のように表される．

$$\mathbf{u}_L^{ref}=(\hat{\mathbf{y}}\cos\alpha_L-\hat{\mathbf{x}}\sin\alpha_L)\times\sum_{n=1}^{N_h}\Big[C_n\cos(n\omega\tau)+D_n\sin(n\omega\tau)\Big] \tag{11}$$

$$\mathbf{u}_T^{ref}=(-\hat{\mathbf{y}}\sin\alpha_T+\hat{\mathbf{x}}\cos\alpha_T)\times\sum_{n=1}^{N_h}\Big[E_n\cos(n\omega\tau)+F_n\sin(n\omega\tau)\Big] \tag{12}$$

$$\mathbf{u}_L^{tra}=(-\hat{\mathbf{y}}\cos\beta_L+\hat{\mathbf{x}}\sin\beta_L)\times\sum_{n=1}^{N_h}\Big[G_n\cos(n\omega\tau)+H_n\sin(n\omega\tau)\Big] \tag{13}$$

$$\mathbf{u}_T^{tra}=(\hat{\mathbf{y}}\sin\beta_T+\hat{\mathbf{x}}\cos\beta_T)\times\sum_{n=1}^{N_h}\Big[I_n\cos(n\omega\tau)+J_n\sin(n\omega\tau)\Big] \tag{14}$$

ここで，$\tau=(xk_L/\omega)\sin\theta_L-t$ であり，C_n，D_n，E_n，F_n，G_n，H_n，I_n，J_n は Fourier 係数である．反射角 α_L，α_T 透過角 β_L，β_T は Snell の法則よって求められる．界面 S での開口変位，及び表面力を求め，境界条件式 (7)-(9) に代入し，静的な開口変位の y 方向成分 $[u_y^{st}]$，及び Fourier 係数 C_n，D_n，E_n，F_n，G_n，H_n，I_n，$J_n(n=1,...,N_h)$ を求める．式 (9) で表される摩擦の境界条件には開口変位の時間微分のみが含まれるため，静的な開口変位の x 方向成分 $[u_x^{st}]$ は，物理現象に影響を与えないことに注意する．詳細は省略するが，三角関数の直交性を用いると次のような解くべき非線形方程式を導出することが出来る．

$$\begin{cases} f_1([u_y^{st}],C_n,D_n,E_n,F_n,G_n,H_n, I_n,J_n(n=1,...,N_h))=0 \\ \vdots \\ f_{8N_h+1}([u_y^{st}],C_n,D_n,E_n,F_n,G_n,H_n, I_n,J_n(n=1,...,N_h))=0 \end{cases} \tag{15}$$

本研究では，式 (15) を Newton 法によって数値的に解く．

式 (15) を Newton 法によって解く場合，未知量に対する f_i の連続性が重要であり，未知量による f_i の一回微分が連続である必要がある．しかしながら，式 (7)-(9) で表される境界条件の不連続性に起因してこの条件を満足しないため，境界条件式 (7)-(9) を次のように変形する．

$$\mathbf{t}\cdot\hat{\mathbf{y}}=\gamma_1(\lambda+2\mu)k_L[\mathbf{u}]\cdot\hat{\mathbf{y}}\mathrm{H}(-[\mathbf{u}]\cdot\hat{\mathbf{y}}) \tag{16}$$

$$\mathbf{t}\cdot\hat{\mathbf{x}}=\mu_d(\mathbf{t}\cdot\hat{\mathbf{y}})\tanh\left[\gamma_2\frac{[\dot{\mathbf{u}}]\cdot\hat{\mathbf{x}}}{u_0\omega}\right] \tag{17}$$

ここで，γ_1，γ_2 は正則化パラメーターであり，数値解析において十分大きな正の実数とする．λ，μ はラメ定数，H は Heaviside 関数である．

4. おわりに

本論文では，接触条件を考慮した界面での平面波の反射・透過問題の解析方法を説明した．数値解析結果，及びその考察については，当日報告する．

参考文献

1) I. Yu. Solodov, D. Doring, and G. Busse: New opportunities for NDT using non-linear interaction of elastic waves with defects, *J. Mech. Eng.*, Vol.57, No.3, pp.169–182, 2011.
2) 丸山泰蔵，東平光生:き裂面の接触音響非線形性を伴う散乱問題に対する調和バランス-境界要素法，計算数理工学論文集，Vol.17，No.14-171215，2017.
3) 永井健一，近藤孝弘，吉沢正紹，藪野浩司，矢々崎一幸著:非線形のダイナミクス-非線形現象の解析入門-，コロナ社，2007.