

残留変位を含む変位波形の計算における Phinney 法の適用について

港湾空港技術研究所 正会員 ○野津 厚

1. はじめに 任意の時刻歴波形 $f(t)$ に対し、一般的には、フーリエ変換は式(1)で、フーリエ逆変換は式(2)で定義される。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (1)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (2)$$

しかし、断層近傍で観測される変位波形のように $t = \infty$ で $f(t) = 0$ とならない波形については、式(1)の広義積分でフーリエ変換を定義することには無理がある。このような問題に対して、数学的困難さを伴わずに対処できる方法として、角周波数 ω に虚部を導入する方法が Phinney¹⁾により提案されている。この方法を断層近傍での速度波形に適用し、周波数領域で積分して変位波形を計算し、時間領域での積分結果と比較してその精度を検討した。

2. Phinney 法 角周波数 ω への虚部の導入は次のように行う。任意の時刻歴波形 $f(t)$ に、時間とともに減少する項 $e^{-\lambda t}$ をかけた関数 $f(t)e^{-\lambda t}$ のフーリエ変換を $F_{\lambda}(\omega)$ とすると、式(1)(2)より次式が成立する。

$$F_{\lambda}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (f(t)e^{-\lambda t})e^{-i\omega t} dt \quad (3)$$

$$f(t)e^{-\lambda t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\lambda}(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (4)$$

ここに λ は正の定数とする。ここでは、 $f(t)$ に $e^{-\lambda t}$ をかけることにより、無理なくフーリエ変換できる関数となっている点がポイントである。ここで

$$\omega_c = \omega - \lambda i \quad (5)$$

とおくと、式(3)より次式が成立する。

$$F_{\lambda}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega_c t} dt \quad (6)$$

この右辺は、フーリエ変換の定義式(1)において ω を ω_c に置き換えたものに他ならない。すなわち

$$F_{\lambda}(\omega) = F(\omega_c) \quad (7)$$

である。式(7)を式(4)に代入すると次式を得る。

$$f(t) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_c)e^{i\omega_c t} d\omega_c \right) e^{\lambda t} \quad (8)$$

以上をまとめると

$$F(\omega_c) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega_c t} dt \quad (9)$$

$$f(t) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_c)e^{i\omega_c t} d\omega_c \right) e^{\lambda t} \quad (10)$$

となる。これが周波数に虚部を含む場合の新しいフーリエ変換対である。すなわち $F(\omega)$ に式(2)を適用して $f(t)$ を求める代わりに $F(\omega_c)$ に式(10)を適用して $f(t)$ を求めることができる。フーリエ変換を式(1)で定義している関係上、周波数に導入する虚部は負でなければならない。

なお、Phinney 法の利用にあたり、FORTRAN の倍精度計算を前提とすると、 $\lambda = 2\pi/T$ 程度とするのが良い。ここに T は離散フーリエ変換に用いるデータ長である。また、最終段階で $e^{\lambda t}$ を乗じる関係上、波形の後半にはノイズが乗るので、あらかじめ必要なデータ長の2倍のデータ長で計算しておき、後半を棄却するのがよい。

Phinney 法は様々な場面で有用となる。その一つは、速度波形 $v(t)$ をもとに、残留変位を含む変位波形 $u(t)$ を求める場合である。このとき、 $v(t)$ のフーリエ変換 $V(\omega^*)$ と $u(t)$ のフーリエ変換 $U(\omega^*)$ との間には、周波数が実数である場合と同様、

$$U(\omega^*) = V(\omega^*)/(i\omega^*) \quad (11)$$

なる関係が成立する。しかも、 $\omega = 0$ のときでも $\omega^* = 0$ とはならないので、式(11)において周波数がゼロの場合を別扱いする必要がない。この点も Phinney 法の優れた点である。

3. 数値例(その1) デルタ関数の積分 数値例の一つ目として、デルタ関数 $\delta(t - t_0)$ を積分して単位ステップ関数を得る事例を示す。ここに $t_0 = 1s$ とする。デルタ関数をサンプリング間隔 $\Delta t = 0.01s$ 、データ長 $T = 10.24s$ の離散的なデータで表現し、 $1s$ に相当する101個目のデータの値を $1/\Delta t$ とした。 λ は $2\pi/T$ とした。図-1に結果を示す。灰色の線が正解である。Phinney 法による結果は波形の終端部にノイズがある。これは先に述べたように最終段階で $e^{\lambda t}$ を乗じるためである。そこで、上述の通り計算結果の後半を棄却し前半を成果とする。なお、Phinney 法による結果は立ち上がり部にもわずかにノイズが見られる。これはナイキスト周波数である50Hz以上の成分を考慮できていないためである。

キーワード Phinney 法, 積分, 断層変位, フリリングステップ, 熊本地震

連絡先 〒239-0826 神奈川県横須賀市長瀬 3-1-1 港湾空港技術研究所 Tel:046-844-5058

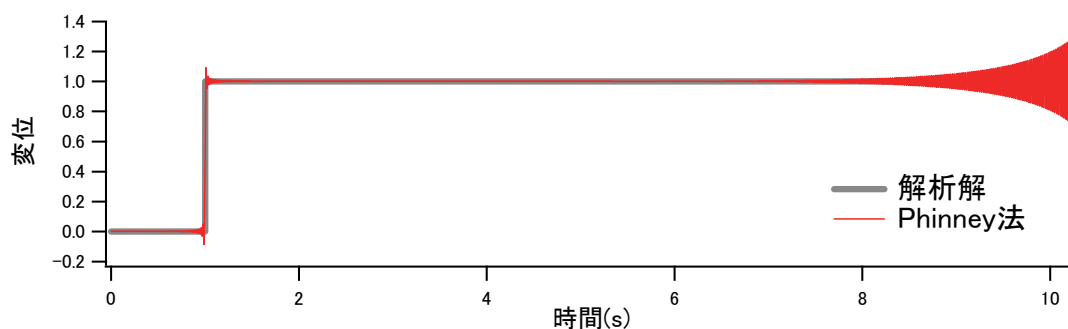


図-1 デルタ関数を積分して単位ステップ関数を求めた結果

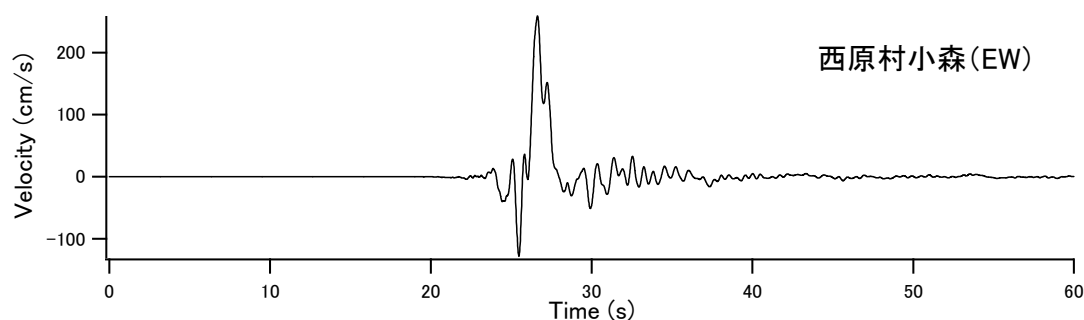


図-2 1次関数を差し引いた後の速度波形（これをもとに積分を行った）

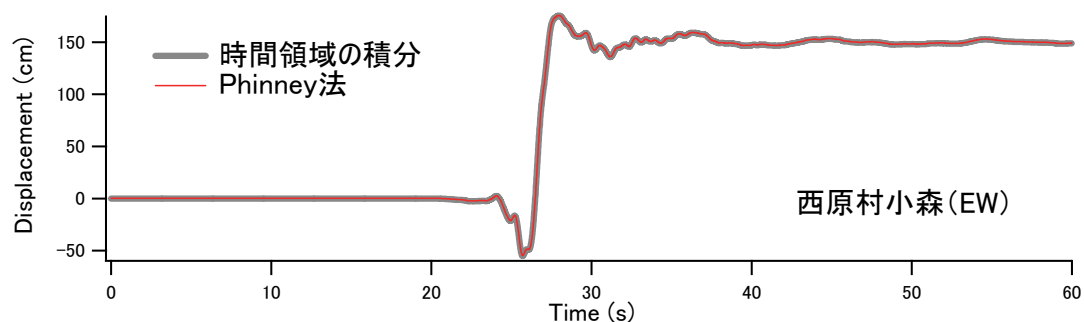


図-3 Phinney 法による結果と時間領域の積分結果

4. 数値例（その2）速度波形の積分 数値例の二つ目として、2016年熊本地震の本震の際に西原村小森で得られた強震記録への適用事例を示す。対象とするのはEW成分である。この記録をそのまま積分するのではなく、まず加速度波形を時間領域で一回積分して60s分の速度波形を求め、これより1次関数を差し引いたものを出発点とした。差し引いた1次関数は

$$v(t) = 40.52 - 1.458t \quad (t > 27.79s) \quad (12)$$

である。1次関数を差し引いた後の60s分の速度波形を図-2に示す。この波形をもとにPhinney法で変位波形を計算し、時間領域における積分結果と比較した。サンプリング間隔は $\Delta t = 0.01s$ である。最終的に60sの変位波形を得ることを目標とし、離散フーリエ変換に用いるデータ長は余裕をみて $T = 163.84s$ とした（図-2の波形に後続のゼロを追加し163.84sとした）。 λ は $2\pi/T$ とした。図-3に結果を示す。灰色の線が時間領域における積分結果である。Phinney法による結果は時間領域に

おける積分結果とほぼ一致している。

5. まとめ 速度波形を積分して残留変位を含む変位波形を求める問題に対してPhinney法は有効であると言える。速度波形を周波数領域で積分して残留変位を含む変位波形を求める方法としては、これ以外にも、波形を偶関数と奇関数に分けて評価する方法²⁾などもあるが、筆者はPhinney法の方を好んでいる。これは、 $f(t)$ に $e^{-\lambda t}$ をかけることにより数学的に扱いやすい関数とするという手順に汎用性が感じられることが理由の一つである。Phinney法は他にも水平成層構造のグリーン関数の計算³⁾等において有用である。

謝辞 気象庁・熊本県によるデータを使用しました。記して謝意を表します。

参考文献 1) Phinney, R.A.: Theoretical Calculation of the Spectrum of First Arrivals in Layered Elastic Mediums, *Journal of Geophysical Research*, Vol.70, No.20, pp.5107-5123, 1965. 2) 理論地震動研究会編：地震動—その合成と波形処理，鹿島出版会，1994年。3) 野津厚：水平成層地盤の地震波動場を計算するプログラムの開発—周波数に虚部を含む離散化波数法の計算精度—，港湾空港技術研究所資料，No.1037，2002年。