

## 自由辺を有する Huber 型異方性多層版の数値解析

(株)井沢設計 正会員 ○廣瀬 清泰  
 大阪工業大学名誉教授 正会員 堀川都志雄

### 1. はしがき

著者らは変位関数による特解と薄板理論の同時解とを結合する混合法に、一方向を調和解析、他方向を選点法とする STRIP 法を併用することで、自由辺を有する版の一般解を導く手法を開発した<sup>1)</sup>。

本研究では、互いに独立な物体力に対応する Huber 型異方性体の変位関数の誘導、および変位関数に基づく級数タイプの特解と異方性薄板理論の同時解からなる混合法を提案し、STRIP 法の併用により自由辺をもつ異方性版の変位と応力を検討する。

### 2. 異方性体の変位関数の概要

Huber 型異方性体からなる板の座標系を図-1 に示す。  $E_x > E_y$  の場合での変位関数の基礎式を記述する。なお上添字( $p$ )と( $h$ )は特解と同時解を、また下添字( $b$ )と( $s$ )は曲げ問題と引張り問題を表す。

#### 2-1 Mode-D ( $E_x > E_y$ ) の場合

特解を表す変位関数の基礎式や同時解でのたわみと変位関数の基礎式をそれぞれ式(1)と(2)に示す。

$$(\sqrt{\beta}\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)^2 f_3 = 0, (\sqrt{\beta}\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) \theta_3 = 0 \quad (1)$$

$$(\sqrt{\beta}\partial_x^2 + \partial_y^2)^2 w^h = q_m, (\sqrt{\beta}\partial_x^2 + \partial_y^2)^2 \phi_1^h = 0 \quad (2)$$

ここで、  $\beta = E_x / E_y$ ,  $\partial_x^2 = \partial^2 / \partial x^2$ ,  $\partial_y^2 = \partial^2 / \partial y^2$ ,  $\partial_z^2 = \partial^2 / \partial z^2$   
 $\lambda, \mu$ : ラメの定数,  $\nu$ : ポアソン比

これらの変位関数と変位との関係式は式(3)と(4)で表される。

$$2\mu u^p = -\partial_x \partial_z f_3 + \partial_y \theta_3, \quad 2\mu v^p = -\partial_y \partial_z f_3 - \sqrt{\beta} \partial_x \theta_3,$$

$$2\mu w^p = (\lambda + 2\mu) / (\lambda + \mu) [\sqrt{\beta} \partial_x^2 + \partial_y^2 + \mu / (\lambda + 2\mu) \partial_z^2] f_3 \quad (3)$$

$$u_b^h = -z \partial_x w^h, \quad v_b^h = -z \partial_y w^h, \quad u_s^h = \{(1 - \nu) \sqrt{\beta} \partial_x^2 + 2\partial_y^2\} \phi_1^h, \quad v_s^h = -(1 + \nu) \sqrt{\beta} \partial_x \partial_y \phi_1^h \quad (4)$$

2-2 Mode-M ( $E_x \leq E_y$ ) の場合 パラメータ  $\alpha = E_y / E_x$  を導入する。各式は紙面の都合上省略する。

### 3. 変位と応力の級数展開

床版の中央線 ( $y/a=0$ ) に関して正対称モードの変形となる場合は次式のように得られる。例えば Mode-D での変位  $w$  と応力  $\sigma_x$  は次のように示される。

$$\begin{aligned} 2\mu w &= -\sum_m \{ \sum_n [C_1 \text{ch}\gamma z + C_2 \text{sh}\gamma z + C_3 \{ \gamma z \text{ch}\gamma z - 2(1 - 2\nu) \text{sh}\gamma z \} \\ &\quad + C_4 \{ \gamma z \text{sh}\gamma z - 2(1 - 2\nu) \text{ch}\gamma z \}] \gamma^2 \cos \beta_n y + 2\mu [A_m \text{ch}\rho_m y + D_m \rho_m y \text{sh}\rho_m y] / D_0 \} \sin \alpha_m x, \\ \sigma_x &= \beta \sum_m \{ \sum_n [C_1 \text{sh}\gamma z + C_2 \text{ch}\gamma z + C_3 \{ \gamma z \text{sh}\gamma z + (1 + 2\nu / \sqrt{\beta} \cdot \gamma^2 / \alpha_m^2) \text{ch}\gamma z \} \\ &\quad + C_4 \{ \gamma z \text{ch}\gamma z + (1 + 2\nu / \sqrt{\beta} \cdot \gamma^2 / \alpha_m^2) \text{sh}\gamma z \} + \beta_n / \alpha_m \gamma (C_5 \text{ch}\gamma z + C_6 \text{sh}\gamma z)] \gamma \cos \beta_n y \\ &\quad + 12(1 - \nu) z [A_m \text{ch}\rho_m y + D_m \{ \rho_m y \text{sh}\rho_m y - 2\nu / (1 - \nu) \text{ch}\rho_m y \}] / h^3 \\ &\quad - (1 + \nu) \sqrt{\beta} [I_m \text{ch}\rho_m y + L_m \{ \rho_m y \text{sh}\rho_m y + 2(2 + \nu) / (1 + \nu) \text{ch}\rho_m y \}] \alpha_m / h \} \alpha_m^2 \sin \alpha_m x \quad (5) \end{aligned}$$

ここで、  $\alpha_m = m\pi/a$  ( $m=1, 2, 3 \dots$ ),  $\beta_n = (2n+1)\pi/b$  ( $n=0, 1, 2 \dots$ ),

$\gamma^2 = \sqrt{\beta} \alpha_m^2 + \beta_n^2$ ,  $\rho_m^2 = \sqrt{\beta} \alpha_m^2$ ,  $D_0 = E_0 h^3 / 12(1 - \nu^2)$ ,  $\text{ch}\gamma z = \cosh \gamma z$ ,  $\text{sh}\gamma z = \sinh \gamma z$ ,

$C_1 \sim C_6$  は版の上下面での境界条件より決定される積分定数。

$A_m \sim D_m$ ,  $I_m \sim L_m$  はそれぞれ曲げ問題と引張り問題での境界条件による積分定数。

中央線に関して逆対称モードの変形となる場合も同様に展開できる。

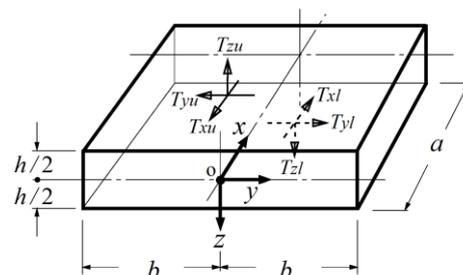


図-1 座標および形状

4. 本解析法の検証

$x, y$  方向のスパンが  $a$ , 版厚比  $h/a=0.1$  の異方性版(異方性度パラメータ  $\alpha, \beta=2.0$ ) が等分布荷重を受ける例を取り上げる. なお多層版の解析では区割り数 20 の STRIP 法を用い, 級数の項数  $m, n$  が 100 で, 上添字( $u$ )と( $l$ )は最上面と最下面を意味する. また異方性板は異方性薄板理論, 古典解は等方性薄板理論を示す.

4-1 相対 2 辺 ( $y/a=\pm 0.5$ ) が自由, 残りの辺が単純支持の場合

たわみと応力の比較を表-1 に示す.

4-2 1 辺 ( $y/a=0$ ) が固定, 残りの辺が単純支持の場合

$y$  方向のスパンを  $2a$ , 中央線  $y/a=0$  の下面で剛な支持桁を有する版を想定し, 対称性を考慮すればたわみと応力は表-2 の比較となる.

4-3 1 辺 ( $y/a=0$ ) が固定, 対辺 ( $y/a=1.0$ ) が自由, 残りの辺が単純支持の場合

たわみと応力の比較を表-3 に示す.

5. あとがき

弾性係数の大きい方向(強軸方向という)の応力が大きくなっている. 詳細は当日発表する.

参考文献

- 1) 廣瀬清泰, 鍋島益弘, 堀川都志雄: 急変する版厚を有する張出し多層版の STRIP 法による数値解析, 第八回道路橋床版シンポジウム, pp. 3-8, 2014.

表-1a Mode-M でのたわみ, 応力の比較( $x/a=0.5, \alpha=2.0$ )

$y/a=$	0.0			0.5		
	異方性版	3層版	古典解	異方性版	3層版	古典解
$w^u E_0 / qa$	144.3	145.3	142.9	162.6	148.8	164.8
$w^l E_0 / qa$	144.3	145.3	142.9	162.6	148.8	164.8
$\sigma_x^u / q$	-73.49	-73.61	-73.50	-77.99	-74.49	-79.08
$\sigma_x^l / q$	73.49	73.55	73.50	77.99	74.48	79.08
$\sigma_y^u / q$	-19.83	-20.14	-16.26	0.0	0.0	0.0
$\sigma_y^l / q$	19.83	20.17	16.26	0.0	0.0	0.0

表-1b Mode-D でのたわみ, 応力の比較( $x/a=0.5, \beta=2.0$ )

$y/a=$	0.0			0.5		
	異方性版	3層版	古典解	異方性版	3層版	古典解
$w^u E_0 / qa$	70.76	72.00	142.9	82.12	73.61	164.8
$w^l E_0 / qa$	70.76	71.95	142.9	82.12	73.56	164.8
$\sigma_x^u / q$	-73.41	-73.65	-73.50	-78.82	-74.42	-79.08
$\sigma_x^l / q$	73.41	73.52	73.50	78.82	-74.38	79.08
$\sigma_y^u / q$	-12.93	-13.17	-16.26	0.0	0.0	0.0
$\sigma_y^l / q$	12.93	13.15	16.26	0.0	0.0	0.0

表-2a Mode-M でのたわみ, 応力の比較( $x/a=0.5, \alpha=2.0$ )

$y/a=$	0.0			0.5		
	本解析		等方性版	本解析		等方性版
	単一板	3層版		単一板	3層版	
$w^u E_0 / qa$	1.539	2.480	1.611	21.44	21.62	33.22
$w^l E_0 / qa$	0.0	1.007	0.0	21.40	21.58	33.18
$\sigma_x^u / q$	10.30	8.540	12.69	-14.63	-14.60	-21.26
$\sigma_x^l / q$	-50.24	-46.06	-49.86	14.66	14.86	21.31
$\sigma_y^u / q$	51.83	51.46	45.09	-28.75	-28.90	-23.99
$\sigma_y^l / q$	-140.5	-138.6	-102.8	28.31	28.39	23.67

表-2b Mode-D でのたわみ, 応力の比較( $x/a=0.5, \beta=2.0$ )

$y/a=$	0.0			0.5		
	本解析		等方性版	本解析		等方性版
	単一板	3層版		単一板	3層版	
$w^u E_0 / qa$	1.481	3.202	1.611	25.08	25.35	33.22
$w^l E_0 / qa$	0.0	1.964	0.0	25.04	25.31	33.18
$\sigma_x^u / q$	13.73	8.833	12.69	-30.00	-30.00	-21.26
$\sigma_x^l / q$	-38.16	-45.88	-49.86	30.01	30.84	21.31
$\sigma_y^u / q$	36.11	34.50	45.09	-19.15	-19.23	-23.99
$\sigma_y^l / q$	-61.96	-81.89	-67.61	18.83	18.93	23.67

表-3a Mode-M でのたわみと応力の比較( $x/a=0.5, \alpha=2.0$ )

$y/a=$	0.5			1.0		
	本解析		等方性版	本解析		等方性版
	単一板	3層版		単一板	3層版	
$w^u E_0 / qa$	51.19	52.28	--	103.3	109.2	123.4
$w^l E_0 / qa$	51.14	52.23	--	103.3	109.2	123.4
$\sigma_x^u / q$	-26.95	-26.92	--	-48.44	-47.34	-58.32
$\sigma_x^l / q$	27.09	27.30	--	49.17	48.09	58.32
$\sigma_y^u / q$	-17.67	-16.76	--	0.0	0.0	0.0
$\sigma_y^l / q$	17.44	16.47	--	0.0	0.0	0.0

表-3b Mode-D でのたわみと応力の比較( $x/a=0.5, \beta=2.0$ )

$y/a=$	0.5			1.0		
	本解析		等方性版	本解析		等方性版
	単一板	3層版		単一板	3層版	
$w^u E_0 / qa$	40.60	41.28	--	69.63	73.96	123.4
$w^l E_0 / qa$	40.56	41.23	--	69.63	73.96	123.4
$\sigma_x^u / q$	-43.60	-43.66	--	-66.10	-65.28	-58.32
$\sigma_x^l / q$	43.69	44.53	--	67.02	66.00	58.32
$\sigma_y^u / q$	-15.01	-14.75	--	0.0	0.0	0.0
$\sigma_y^l / q$	14.80	14.57	--	0.0	0.0	0.0