

地下水浸透流有限要素解析における揚水／注水の任意メッシュ対応点源モデル

清水建設 正 ○櫻井英行・正 山田俊子

1. はじめに

地盤の水理特性の把握を目的とした孔間透水試験の評価のために有限要素解析が実施される。その際、評価に十分な解を得るためには、解析領域に比べて非常に細い孔による揚水／注水(以降、揚水)を適切にモデル化する必要がある。しかし、実際にはメッシュ分割作業や計算容量・時間などの軽減を理由に、孔径を無視した点源列としてモデル化されることは少なくない。ただ、この点源モデルは要素サイズに応じた有限の径(相当半径)を持つことになるため、相当半径が実半径と一致するように分割しないと正しい解が得られないという問題を有する。これに対する FDM や FEM による研究例は多い。著者らも、点源周りの要素の透水係数を補正する方法を提案してきた¹⁾²⁾。透水係数の補正だけなので、既存プログラムへの実装や解析の前後処理として利用可能な実用性の高い方法である。しかし、既往の研究は、著者らの研究も含めて、いずれも構造格子やそれに準ずる写像型格子に限り適用できるモデルである。本研究では、FEM の最大の利点である複雑形状への順応性を活かすため、任意分割の三次元メッシュに適用可能な点源モデルの開発を目標としている。本稿では、その第一報として、モデル化法とその検証の一例を紹介する。

2. 点源モデルの導出

図 1 に示す等方均質な被圧帯水層中の単孔から、一定量の地下水を揚水する定常軸対象問題を取り上げる。これは、次の浸透流方程式と境界条件式で記述される。

$$k\nabla^2\phi=0 \quad [r_w \leq r < R] \quad (1)$$

$$\phi = \hat{\phi}_w \quad [r=r_w], \quad \phi = \hat{\phi}_R \quad [r=R] \quad (2)$$

ここで、 ϕ は全水頭、 k は透水係数、 r_w と $\hat{\phi}_w$ は揚水孔の半径と全水頭値、 $\hat{\phi}_R$ は領域外縁の全水頭値である。

透水層厚さを D とすると、この問題の理論解は、

$$Q_{\text{theory}} = 2\pi k D (\hat{\phi}_R - \hat{\phi}_w) [\ln(R/r_w)]^{-1} \quad (3)$$

$$\phi_{\text{theory}} = (2\pi k D)^{-1} Q_{\text{theory}} \ln(r/r_w) + \hat{\phi}_w \quad (4)$$

ここで、 Q_{theory} は揚水孔からの流量である。

圧力や流量によって制御する揚水孔の極近傍の流動場は、解析領域の形状や境界条件に依らず揚水の影響が支配的であり、式(3)(4)で表されることが考えられる。本モデルでは、点源に連結する要素(以降、連結要素)のみの透水係数を式(3)によって補正する。

各要素の FEM 方程式は次のように記述できる。

$$\sum_{j=1}^{N^e} (C_{ij}^e \phi_j^e) + q_i^e = 0, \quad i=1,2,\dots,N^e, \quad j=1,2,\dots,N^e \quad (5)$$

ここで、 e は要素に関するインデックス、 C_{ij}^e 、 N^e 、 ϕ_j^e 、 q_i^e はそれぞれ要素 e の係数行列、構成節点数、構成節点 j の水頭値、構成節点 i の流量値である。

一般に、解の悪化を避けるため、点源周りのメッシュ分割はできるだけ「ゆがみ」のないように配慮されるので、点源を除く連結要素の構成節点(至近節点)の水頭値には大差がないと考えることができる。したがって、

$$\phi_j^e \cong \bar{\phi}_s, \quad \forall j \in \mathbf{N}_w \quad (6)$$

ここで、 $\mathbf{N}_w$ は、ある点源 w を構成節点を持つ連結要素群の至近節点の集合、 $\bar{\phi}_s$ は $\mathbf{N}_w$ に属する至近節点の平均的な水頭値である。

式(5)において、要素構成節点の一つが、水頭値 $\hat{\phi}_w$ で規定される点源 w であるとし、要素内一定の要素透水係数 k^e を C_{ij}^e から分離して標記すると、次のようになる。

$$k^e c_{ww}^e (\bar{\phi}_s - \hat{\phi}_w) = q_w^e \quad (7)$$

要素構成節点の複数が一本の孔に連結している場合も式(7)と同様の関係が導出できるので、ある点源 w の連結

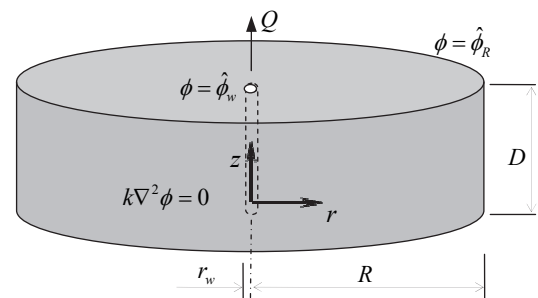


図 1 揚水孔の軸対称問題

キーワード: 浸透流解析, 有限要素法, 点源, 任意メッシュ, 非構造格子, 揚水・注水

連絡先: 〒135-8530 東京都江東区越中島 3-4-17 清水建設(株)技術研究所 TEL(03)3820-8419

要素の集合を $\mathbf{E}_w$ で表すと、点源 w に集まる流量 Q_w は、

$$Q_w = \sum_{e \in \mathbf{E}_w} q_w^e = (\bar{\phi}_s - \hat{\phi}_w) \sum_{e \in \mathbf{E}_w} (k^e c_{ww}^e) \quad (8)$$

点源 w における至近節点群までの平均距離を $\bar{R}_s$ とし、理論式(3)の $\hat{\phi}_R$ と R の代わりに、至近節点群の平均値 $\bar{\phi}_s$ と $\bar{R}_s$ を用い、式(3)の Q_{theory} と式(8)の Q_w が等しいとすると、

$$\sum_{e \in \mathbf{E}_w} (k^e c_{ww}^e) = 2\pi k D_w \left[\ln(\bar{R}_s / r_w) \right]^{-1} \quad (9)$$

ここで、 D_w は点源 w が占有する孔の長さであり、点源 w に繋がる上下の点源間の距離の 1/2 である。

さらに、式(9)左辺の k^e の代わりに $\tilde{k}_w^e$ を、右辺の k の代わりに k^e を用いると、次式が得られる。

$$\tilde{k}_w^e = B_w k^e \quad (10)$$

$$B_w = 2\pi D_w \left[\ln(\bar{R}_s / r_w) \sum_{e \in \mathbf{E}_w} c_{ww}^e \right]^{-1} \quad (11)$$

$\tilde{k}_w^e$ は揚水孔至近の流動場を再現するように補正した点源 w の連結要素の透水係数、 B_w は補正係数である。

要素が二つの点源(点源 w とその前後のいずれか)に連結している場合は、各点源で式(10)から得られる透水係数の平均を用いることとする。

3. 数値実験による適用性の検証

図1と式(1)(2)で記述される問題を対象として、本モデルのコード検証を実施した。解析条件は次のとおりである。

$$r_w = 0.05\text{m}, \hat{\phi}_w = 100\text{m}, R = 60\text{m}, \hat{\phi}_R = 0\text{m}, D = 60\text{m}$$

軸対称問題ではあるが、メッシュ分割による影響を検証できるようにするため、1/4 の領域を対象とした。図2は概ね 2m の四面体要素で均等に分割したメッシュ、図3はあえて粗密を持たせたメッシュ分割である。両図において、緑線は式(4)の理論解、赤線は本手法により連結要素の透水係

数を補正した結果、青線は本補正を適用していない通常の FEM による結果である。赤の本手法による結果は緑の理論解とよく一致しており、両者が重なっていて、紙面上では差が区別できない部分もある。一方、通常の FEM の結果は、かなり細かい印象を受ける図2のメッシュでも理論解から大きく外れていることが確認できる。図3ではメッシュが荒くなるにつれて、誤差も大きくなっている。これは、有限要素の近似誤差よりむしろ、相当半径と孔の実半径との差が大きくなるためと考えられる。

表1は理論解との相対誤差である。本補正を行った結果は、補正なしの FEM の結果と比較して、全水頭誤差(境界条件を除く全節点の L^2 ノルム)、流量誤差の両者とも1オーダー小さい誤差となることが分かる。

4. おわりに

FEM 浸透流解析において、揚水孔を点源としてモデル化するための任意メッシュに対応した新しい方法を開発した。簡単な検証問題により、本手法の有効性を示した。本稿では四面体要素の結果のみを示したが、本手法は五面体(三角柱)や六面体要素でも検証済みである。

参考文献

- 1) 山田ら: 有限要素法を用いた浸透流解析における注水・揚水孔の実用的な簡易モデル, 土木学会論文集 C-71-4, 407-417, 2015.
- 2) 山田ら: 注水／揚水孔の簡易有限要素モデルのコード検証, 土木学会論文集 C-73-4, 450-459, 2017.

表1 理論解との相対誤差

	図2 均等メッシュ		図3 不均等メッシュ	
補正有無	なし	あり	なし	あり
水頭誤差	3.853e-1	1.448e-2	4.476e-1	1.766e-2
流量誤差	3.831e-1	1.283e-2	6.592e-1	2.383e-2

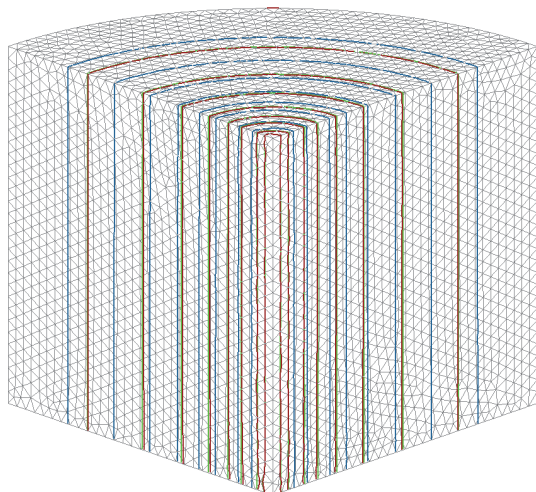


図2 均等なメッシュと全水頭分布の比較

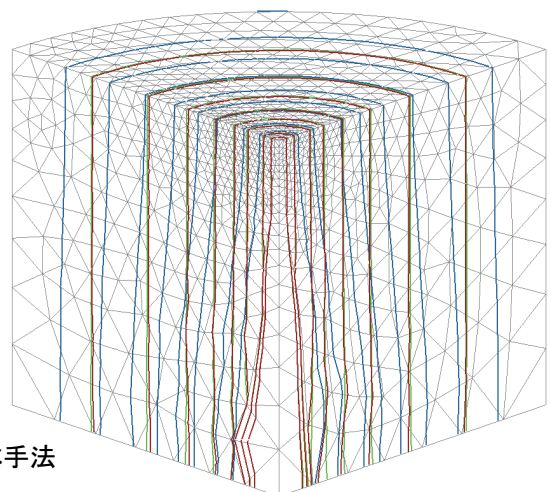


図3 不均等なメッシュと全水頭分布の比較

— 理論解
— FEM
— FEM+本手法