

DE-Sinc 数値計算法を用いた境界要素法の 2次元 Helmholtz 方程式への適用

○東京工業大学 学生会員 射場 峻輔
東京工業大学 正会員 古川 陽
群馬大学 正会員 斎藤 隆泰
東京工業大学 正会員 廣瀬 壮一

1. 背景・目的

コンピュータを用いた数値解析手法は、理工学の分野において、重要な役割を担っている。中でも境界要素法は、無限領域を厳密に扱える等の利点から、非常に有用であり、様々な問題に適用されている。また、境界積分方程式の離散化や、積分の数値計算法についても、これまで数多くの研究がなされている。

関数の近似、および積分の数値計算に用いられる強力な手法の一つに、二重指数関数型変換（DE 変換）と Sinc 関数を組み合わせた DE-Sinc 数値計算法がある¹⁾。また、これを第二種積分方程式に適用した Sinc-Nyström 法が Muhammad et al.²⁾ によって示され、それを修正した Sinc 選点法が岡山によって示されている³⁾。このように、上記の数値計算法は多くの研究が行われ、その信頼性も示されているが、境界積分方程式への適用はこれまで殆ど成されてこなかった。

以上の背景を踏まえ、本研究では、境界積分方程式の離散化、および境界積分の数値計算に DE-Sinc 数値計算法を用いた、DE-Sinc 境界要素法を提案し、これを 2 次元 Helmholtz 方程式へ適用する。この提案手法は、従来の方法とは異なり、特異性を有する境界積分を、直接、数値的に取り扱うことが可能となり、なおかつ、精度を得るために必要な行列のサイズが小さくて済むことが期待できる。本稿では、はじめに DE-Sinc 数値計算法について簡潔にまとめ、それを用いた境界積分方程式の離散化式について説明し、最後に数値解析結果として、境界値の計算結果を示す。

2. DE-Sinc 境界要素法

(1) DE-Sinc 数値計算法

有限区間 $t \in [a, b]$ で定義される関数 $f(t)$ について、刻み幅を h としたとき、DE-Sinc 関数近似³⁾ と呼ばれる、以下の近似式が成り立つ。

$$f(t) \approx \sum_{j=-N}^N f(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh)) S(j, h) (\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(t)) \quad (1)$$

ここで、関数 $S(j, h)(x)$ は Sinc 関数であり、無限区間 x で定義され、次のように表される。

$$S(j, h)(x) = \begin{cases} \frac{\sin\{\pi(x - jh)/h\}}{\{\pi(x - jh)/h\}} & : x - jh \neq 0 \\ 1 & : x - jh = 0 \end{cases} \quad (2)$$

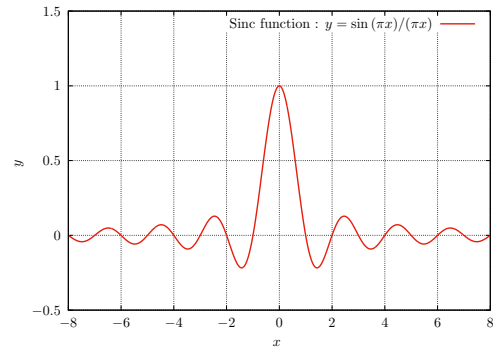


図 1 Sinc 関数 ($j = 0, h = 1$ の場合)

基底関数として用いる Sinc 関数を、図 1 に示す。また、式 (1) において、変数の動作領域を無限区間に拡張するために、二重指数関数型変換（DE 変換）¹⁾ と呼ばれる、以下のような変数変換を用いている。

$$t = \psi_{a,b}^{\text{DE}}(x) = \frac{b-a}{2} \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh(x)\right) + \frac{b+a}{2} \quad (3)$$

$$x = \{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(t) = \log \left[\frac{1}{\pi} \log \left(\frac{t-a}{b-t} \right) + \sqrt{1 + \left\{ \frac{1}{\pi} \log \left(\frac{t-a}{b-t} \right) \right\}^2} \right] \quad (4)$$

この DE 変換により、無限区間で定義される Sinc 関数の適用が可能となっている。また、区間 $[a, b]$ に対する関数 $f(t)$ の定積分は、次のように近似できる。

$$\int_a^b f(t) dt \approx h \sum_{j=-N}^N f(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh)) \{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}'(jh) \quad (5)$$

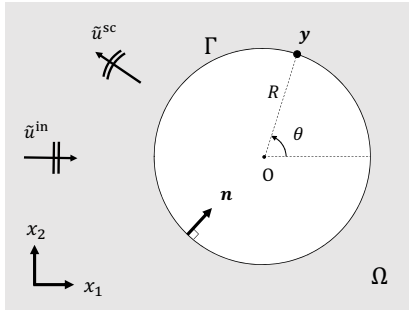
ここで、プライム記号は、式 (3) の引数 x による微分を表す。式 (5) を DE-Sinc 積分³⁾ と呼ぶ。

(2) 境界積分方程式の定式化と離散化

解析対象として、図 2 に示すような外部領域 Ω と、その境界 Γ を考える。等方で均質な線形弾性体の、面外波動問題に対する周波数領域解法を考える。このとき、2 次元 Helmholtz 方程式に対応する、正則化された境界積分方程式は、以下のようにして表現できる。

$$\begin{aligned} & \tilde{u}(\mathbf{x}, \omega) \\ & + \int_{\Gamma} \left\{ \tilde{q}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) \tilde{u}(\mathbf{y}, \omega) - \tilde{q}_{\text{Lap}}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{u}(\mathbf{x}, \omega) \right\} d\Gamma(\mathbf{y}) \\ & - \int_{\Gamma} \tilde{u}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) \tilde{q}(\mathbf{y}, \omega) d\Gamma(\mathbf{y}) = \tilde{u}^{\text{in}}(\mathbf{x}, \omega) \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 ω は角周波数、 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ はそれぞれ観測点とソース点である。 $\tilde{u}$ は変位、 $\tilde{q}$ は表面力、 $\tilde{u}^{\text{in}}$ は入射波の変位を表

図2 解析対象とする外部領域 Ω とその境界 Γ

す. また, $\tilde{u}^*$ と $\tilde{q}^*$ は, それぞれ 2 次元 Helmholtz 方程式の基本解と二重層核, $\tilde{q}_{\text{Lap}}^*$ は 2 次元 Laplace 方程式の二重層核を表している.

本稿では, 境界 Γ を半径 R の円とし, これを 1 つの要素として考える. このとき, 式 (6) に含まれる境界積分は, θ のみを変数とする積分として表現することができる. 変数 θ を用いて表される境界値 $\tilde{u}$ と $\tilde{q}$ に, DE-Sinc 関数近似を適用することで, 次の式が得られる.

$$\tilde{u}(\theta) \approx \sum_{j=-N-1}^{N+1} \tilde{u}_j S(j, h) (\{\psi_{0,2\pi}^{\text{DE}}\}^{-1}(\theta)) \quad (7)$$

$$\tilde{q}(\theta) \approx \sum_{j=-N-1}^{N+1} \tilde{q}_j S(j, h) (\{\psi_{0,2\pi}^{\text{DE}}\}^{-1}(\theta)) \quad (8)$$

ここで, $\tilde{u}_j, \tilde{q}_j$ は境界値の代表点 ($2N+3$ 個) における値であり, 次式で与えられる.

$$\tilde{u}_j = \tilde{u}(\psi_{0,2\pi}^{\text{DE}}(jh)), \quad \tilde{q}_j = \tilde{q}(\psi_{0,2\pi}^{\text{DE}}(jh)) \quad (9)$$

式 (7), (8) を, 式 (6) に代入することで, 以下に示す代数方程式が得られる.

$$(\delta_{ij} + \tilde{h}_{ij}) \tilde{u}_j - \tilde{g}_{ij} \tilde{q}_j = \tilde{u}_i^{\text{in}} \quad (10)$$

ただし, 式 (10) において, 1 つの項にくり返し現れる下付き添え字には, 総和規約を適用する. なお, δ_{ij} は Kronecker のデルタであり, $i = j$ で 1, $i \neq j$ で 0 を与える. また, 係数行列の成分は, 以下に示す通りとなる.

$$\tilde{h}_{ij} = \begin{cases} -Rh \sum_{j=-N-1}^{N+1} \tilde{q}_{\text{Lap}}^*(\theta_i^{\text{DE}}, \theta_j^{\text{DE}}) \{\psi_{0,2\pi}^{\text{DE}}\}'(jh) & : i = j \\ Rh \tilde{q}^*(\theta_i^{\text{DE}}, \theta_j^{\text{DE}}) \{\psi_{0,2\pi}^{\text{DE}}\}'(jh) & : i \neq j \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{ij} = & Rh \sum_{k=-N-1}^{N+1} \tilde{u}^*(\theta_i^{\text{DE}}, \theta_{ki}^{\text{DE}}) S^{\text{DE}}(\theta) \{\psi_{0,\theta_i^{\text{DE}}}^{\text{DE}}\}'(kh) \\ & + Rh \sum_{l=-N-1}^{N+1} \tilde{u}^*(\theta_i^{\text{DE}}, \theta_{il}^{\text{DE}}) S^{\text{DE}}(\theta) \{\psi_{\theta_i^{\text{DE}},2\pi}^{\text{DE}}\}'(lh) \end{aligned} \quad (12)$$

なお, 式 (11), (12) では, 以下の表記を用いた.

$$\begin{aligned} \theta_i^{\text{DE}} &= \psi_{0,2\pi}^{\text{DE}}(ih), & \theta_j^{\text{DE}} &= \psi_{0,2\pi}^{\text{DE}}(jh), \\ \theta_{ki}^{\text{DE}} &= \psi_{0,\theta_i^{\text{DE}}}^{\text{DE}}(kh), & \theta_{il}^{\text{DE}} &= \psi_{\theta_i^{\text{DE}},2\pi}^{\text{DE}}(lh), \\ S^{\text{DE}}(\theta) &= S(j, h) (\{\psi_{0,2\pi}^{\text{DE}}\}^{-1}(\theta)) \end{aligned} \quad (13)$$

式 (10) を解きたい問題の境界条件を用いて整理し, それを解くことで, 未知の境界値を求めることができる.

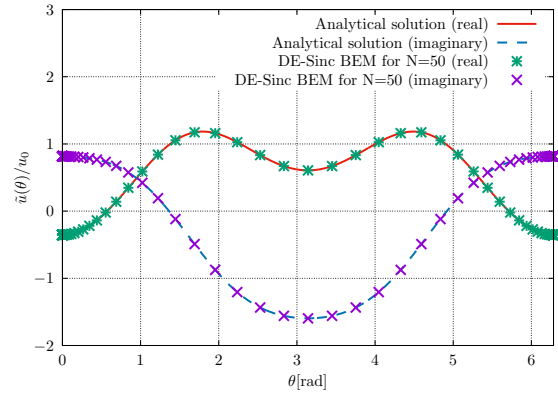


図3 表面力フリーにおける境界値の解析解と DE-Sinc 境界要素法による近似値の比較

3. 数値解析結果

この節では, 図2で示される問題を対象に, 提案手法を用いて実際に数値計算をする事で検証を行う. 実装言語は Fortran90, コンパイラは Intel Compiler/17.0.4.196 で, 浮動小数点数には倍精度を用いた. また, 連立一次方程式は LU 分解 (LAPACK ルーチン: ZGESV) を用いて解いた. 刻み幅 h は, 全て以下の値を用いる.

$$h = \frac{3.190899}{N+1} \quad (14)$$

なお, 式 (14) 中の 3.190899 という値は, 実際に数値計算をしてみた結果から決定した値であり, 端点付近の特異性により計算結果が発散しないような, 無限区間における小数点第6位までの最大値である. また, 入射波は全て以下のような面外平面波とした.

$$\tilde{u}^{\text{in}}(\mathbf{x}) = u_0 \exp(ik^{\text{in}}x_1) \quad (15)$$

ただし, u_0 は振幅, i は虚数単位, k^{in} は入射波の波数であり, $k^{\text{in}}R = 1$ とした. また, $N = 50$ とした.

表面力フリー (境界条件: $\tilde{q}_j = 0$) の場合について, 提案手法を用いて求めた選点ごとの境界値を, 解析解によるグラフに重ねたものを図3に示す. 図に示す結果を比較すると, DE-Sinc 境界要素法による近似解が, 解析解とほとんど一致している事が確認できる.

4. おわりに

本稿では, 2 次元 Helmholtz 方程式に対する境界積分方程式に DE-Sinc 数値計算法を適用した, DE-Sinc 境界要素法の定式化と離散化を示した. そして, 表面力フリーの境界条件において, 提案手法が境界値を正しく求められることを示した.

参考文献

- 森正武: 二重指数関数型変換のすすめ, 数理解析研究所講義録, Vol.1040, pp.143-153, 1998.
- Muhammad, M., Nurmuhhammad, A., Mori, M., and Sugihara, M.: Numerical solution of integral value problems based on the double exponential transformation, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol.177, pp.269-286, 2005.
- 岡山友昭: 第二種積分方程式に対する Sinc 数値計算法, 博士論文, 東京大学, 2010.