凍結した多孔質体と飽和多孔質弾性体の連成解析のための境界要素法の開発と面外波動問題への適用

○東京工業大学　正会員　古川　陽
群馬大学　正会員　斎藤隆泰
東京工業大学　正会員　廣瀬壮一

1. はじめに

メタンハイドレートは，石油や天然ガスに代わる新たなエネルギー資源として注目されている．メタンハイドレート堆積物を含む海底地層を表現する力学モデルとして，凍結した多孔質体 (frozen porous media) が提案されている [1)]．この力学モデルは，固体骨格部（岩盤），氷骨格部（ハイドレート堆積物）と呼ばれる 2 つの骨格と，その間隙を飽和する粘性流体によって構成される三相体モデルである．

著者らはこれまで，凍結した多孔質体の面外波動問題に対する境界要素法を開発し，ハイドレート含有量の多い介在物による入射波の散乱解析を行ってきた [2)]．本稿では，その凍結した多孔質体の成果に，飽和多孔質弾性体の面外波動解析のための境界要素法を連成し，ハイドレート堆積物を含む海底地層とその周辺の海底地層の連成解析を行う．以下では，特に断りのない限り，ギリシャ文字の下付き添え字は 1, 2 をとり，1 つの項の中に繰り返し現れる添え字に対しては総和規約を適用する．

2. 連成解析の定式化

図 1 に示す様な面外波動散乱問題を考える．同図において，解析領域は凍結した多孔質体（領域 V_1）および飽和多孔質弾性体（領域 V_2）によって構成される．このとき，これらの領域の境界を S とする．

本稿に示す定式化では，角周波数 ω における周波数領域の解法を考える．凍結した多孔質体によって構成される領域 V_1 に対する境界積分方程式は，観測点 $\mathbf{x}$ および源点 $\mathbf{y}$ に対して，次式で与えられる．

$$C(\mathbf{x})\tilde{q}_{1;\alpha}(\mathbf{x},\omega) = \int_S \tilde{U}^{\mathrm{FPM}}_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)\tilde{s}_\beta(\mathbf{y},\omega)dS(\mathbf{y}) - \int_S \tilde{W}^{\mathrm{FPM}}_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)\tilde{q}_\beta(\mathbf{y},\omega)dS(\mathbf{y}) \quad (1)$$

ここに，$\tilde{q}_\beta$ および $\tilde{s}_\beta$ は，一般化変位および一般化表面力を表し，次式で与えられる．

$$\tilde{q}_\beta(\mathbf{x},\omega) = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{u}^{(1)}_3(\mathbf{x},\omega) \\ \tilde{u}^{(3)}_3(\mathbf{x},\omega) \end{array} \right\} \quad (2)$$

$$\tilde{s}_\beta(\mathbf{x},\omega) = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{t}^{(1)}_3(\mathbf{x},\omega) \\ \tilde{t}^{(3)}_3(\mathbf{x},\omega) \end{array} \right\} \quad (3)$$

ただし，$\tilde{u}^{(1)}_3$ および $\tilde{u}^{(3)}_3$ は固体骨格部および氷骨格部の変位，$\tilde{t}^{(1)}_3$ および $\tilde{t}^{(3)}_3$ は固体骨格部および氷骨格部の表面力を表す．また，$\tilde{U}^{\mathrm{FPM}}_{\alpha\beta}$ および $\tilde{W}^{\mathrm{FPM}}_{\alpha\beta}$ は，凍結した多孔質体の面外波動問題に対する基本解および二重層核である．さらに，$C(\mathbf{x})$ は自由項 [3)] である．

同様に，飽和多孔質弾性体によって構成される領域 V_2 に対する周波数領域境界積分方程式は，以下の式で与えられる．

$$C_(\mathbf{x})\tilde{u}_3(\mathbf{x},\omega) = \tilde{u}^{\mathrm{in}}_3(\mathbf{x},\omega) + \int_S \tilde{U}^{\mathrm{Biot}}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)\tilde{t}_3(\mathbf{y},\omega)dS(\mathbf{y}) - \int_S \tilde{W}^{\mathrm{Biot}}(\mathbf{x},\mathbf{y},\omega)\tilde{u}_3(\mathbf{y},\omega)dS(\mathbf{y}) \quad (4)$$

ここに，$\tilde{u}_3$ および $\tilde{t}_3$ は，固体骨格部の変位および表面力を表す．また，$\tilde{u}^{\mathrm{in}}_3$ は入射波の変位，$\tilde{U}^{\mathrm{Biot}}$ および $\tilde{W}^{\mathrm{Biot}}$ は，飽和多孔質弾性体の面外波動問題に対する基本解および二重層核を表す．

さらに，本研究で対象とする問題では，境界 S において，以下の境界条件が与えられるものとする．

$$\tilde{u}_3(\mathbf{x},\omega) = \tilde{q}_1(\mathbf{x},\omega) = \tilde{u}^{(1)}_3(\mathbf{x},\omega) \quad (5)$$

$$\tilde{t}_3(\mathbf{x},\omega) = -\tilde{s}_1(\mathbf{x},\omega) = -\tilde{t}^{(1)}_3(\mathbf{x},\omega) \quad (6)$$

$$0 = \tilde{s}_2(\mathbf{x},\omega) = \tilde{t}^{(3)}_3(\mathbf{x},\omega) \quad (7)$$

ただし，上式では，$\mathbf{x} \in S$ である．

式 (1), (4) に示す境界積分方程式を要素内一定の内挿関数を用いて離散化し，上述の境界条件を考慮すれば，以下に示す代数方程式を得る．

$$\left[\begin{array}{cc} \bar{\tilde{\mathbf{B}}}_{\alpha\beta} & -\tilde{\mathbf{A}}_{\alpha 1} \\ \bar{\tilde{\mathbf{H}}}_{\beta} & \tilde{\mathbf{G}} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \tilde{\mathbf{q}}_\beta \\ \tilde{\mathbf{s}}_1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{u}}^{\mathrm{in}} \end{array} \right\} \quad (8)$$

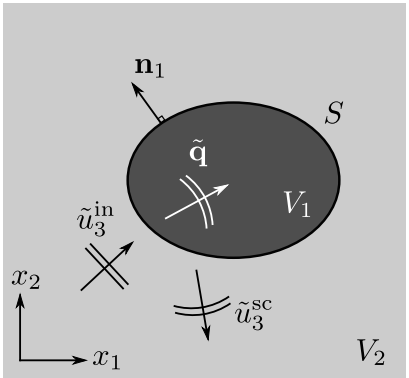

図 1 対象とする問題（領域 V_1：凍結した多孔質体，領域 V_2：飽和多孔質弾性体）

Key Words: 境界要素法，波動解析，凍結した多孔質体，飽和多孔質弾性体
〒 152-8552　東京都目黒区大岡山 2-12-1-W8-22　TEL 03-5734-3587　FAX 03-5734-3587

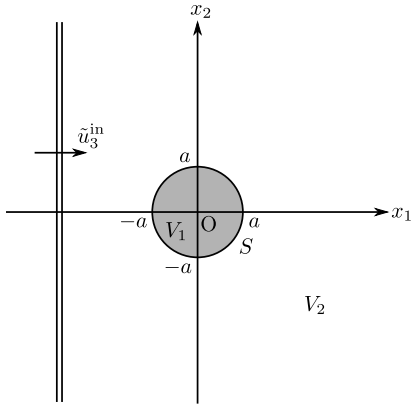

図 2 入射波の散乱解析のための解析モデル

なお，代数方程式を構成するベクトルおよび行列の成分は，以下に示す通りとなる．

$$\{\tilde{\mathbf{q}}_\beta\}_N = \tilde{q}_\beta(\mathbf{y}^N, \omega) \tag{9}$$

$$\{\tilde{\mathbf{s}}_1\}_N = \tilde{s}_1(\mathbf{y}^N, \omega) \tag{10}$$

$$\{\tilde{\mathbf{u}}^{\mathrm{in}}\}_M = \tilde{u}_3^{\mathrm{in}}(\mathbf{x}^M, \omega) \tag{11}$$

$$[\tilde{\mathbf{G}}]_{MN} = \tilde{G}^N(\mathbf{x}^M, \omega) \tag{12}$$

$$[\tilde{\bar{\mathbf{H}}}_\beta]_{MN} = \frac{1}{2}\delta_{MN}\delta_{1\beta} + \delta_{1\beta}\tilde{H}_2^N(\mathbf{x}^M, \omega) \tag{13}$$

$$[\tilde{\mathbf{A}}_{\alpha 1}]_{MN} = \tilde{A}_{\alpha 1}^N(\mathbf{x}^M, \omega) \tag{14}$$

$$[\tilde{\bar{\mathbf{B}}}_{\alpha\beta}]_{MN} = \frac{1}{2}\delta_{MN}\delta_{\alpha\beta} + \tilde{B}_{\alpha\beta}^N(\mathbf{x}^M, \omega) \tag{15}$$

ただし，$\mathbf{x}^N$ および $\mathbf{y}^N$ は，いずれも境界要素 S^N の図心位置に対応する．また，上述の式において，境界要素 S^N に対する積分を含む関数は，次式で与えられる．

$$\tilde{G}^N(\mathbf{x}^M, \omega) = \int_{S^N} \tilde{U}^{\mathrm{Biot}}(\mathbf{x}^M, \mathbf{y}, \omega) dS(\mathbf{y}) \tag{16}$$

$$\tilde{H}^N(\mathbf{x}^M, \omega) = \int_{S^N} \tilde{W}^{\mathrm{Biot}}(\mathbf{x}^M, \mathbf{y}, \omega) dS(\mathbf{y}) \tag{17}$$

$$\tilde{A}_{\alpha 1}^N(\mathbf{x}^M, \omega) = \int_{S^N} \tilde{U}_{\alpha 1}^{\mathrm{FPM}}(\mathbf{x}^M, \mathbf{y}, \omega) dS(\mathbf{y}) \tag{18}$$

$$\tilde{B}_{\alpha\beta}^N(\mathbf{x}^M, \omega) = \int_{S^N} \tilde{W}_{\alpha\beta}^{\mathrm{FPM}}(\mathbf{x}^M, \mathbf{y}, \omega) dS(\mathbf{y}) \tag{19}$$

3. 数値解析例

数値解析例として，凍結した多孔質体によって構成される介在物による入射波の散乱問題を考える．図 2 に，解析モデルを示す．同図において，入射波は振幅を u_0 とする平面波とし，x_1 軸の正方向に進行する．また，介在物の半径 a は 12 [m] とし，解析に用いる周波数 $f(=\omega/(2\pi))$ は 800 [Hz] とした．

解析結果として，図 3 に固体骨格部の変位を，図 4 に氷骨格部の変位を，そして図 5 に固体骨格部の表面力を示す．なお，これらの図に示す値はすべて境界 S における値であり，提案手法によって得られた近似解に加えて，波動関数展開 [4] によって求めた境界値も，あわせて示している．これらの図から，提案手法によって，凍結した多孔質体と飽和多孔質体の面外波動連成問題の解が正しく求められている様子が確認できる．

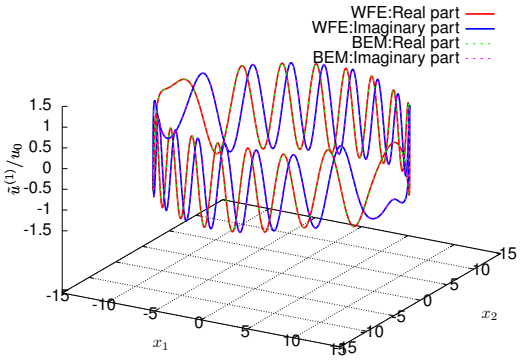

図 3 境界 S における固体骨格部の変位 $\tilde{u}_3^{(1)}/u_0$

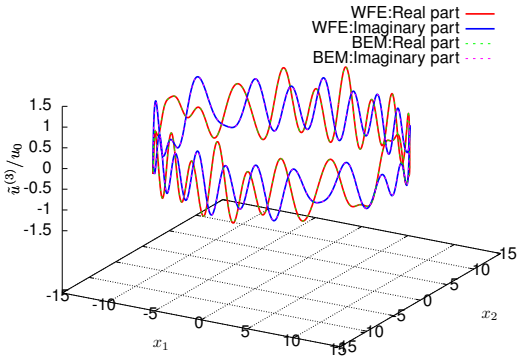

図 4 境界 S における氷骨格部の変位 $\tilde{u}_3^{(3)}/u_0$

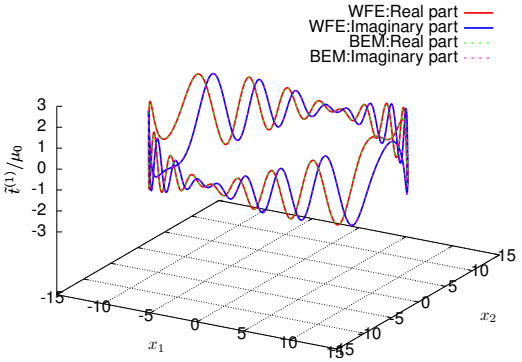

図 5 境界 S における固体骨格部の表面力 $\tilde{t}_3^{(1)}/\mu_0$（ただし，μ_0 は飽和多孔質弾性体のせん断弾性係数とする．）

4. おわりに

本研究では，凍結した多孔質体と飽和多孔質弾性体の面外波動連成解析のための周波数領域境界要素法を開発した．そして，提案手法を用いて，飽和多孔質弾性体の内部に存在する凍結した多孔質体の介在物による面外波動の散乱解析を行った．その結果として得られた解は，波動関数展開による解と概ね一致し，本手法の妥当性が確認された．

参考文献

1) Leclaire, Ph. and Cohen-Ténoudji, F.: Extention of Biot's theory of wave propagation to frozen porous media, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol.96, No.6, pp.3753-3768, 1994.
2) 古川陽, 斎藤隆泰, 廣瀬壮一: 周波数領域境界要素法と ACA による凍結した多孔質体内部の介在物による波動散乱解析, 計算数理工学論文集, Vol.17, 論文 No.17-171215, pp.83-88, 2017.
3) 小林昭一編著: 波動解析と境界要素法, 京都大学学術出版会, 2000.
4) Mow, C. C., Pao, Y. H.: *Diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations*, Crane, Russak, New York, 1973.