

NISP 法を援用したスペクトル確率有限要素法による バラスト道床沈下量予測値に対する弾塑性挙動の空間的 ばらつきの影響評価

新潟大学大学院自然科学研究科 学生員 上平 健太
 新潟大学大学院自然科学研究科 正会員 紅露 一寛
 新潟大学工学部建設学科 正会員 阿部 和久

1. はじめに

国内外で広く採用されているバラスト道床は、列車走行に伴う繰り返し荷重の作用により道床沈下等を引き起こす。そのため、著者らはバラスト道床の繰り返し変形挙動を cyclic densification モデル²⁾に基づく弾塑性連続体でモデル化し、有限要素法を用いて道床沈下量を定量評価する手法を構成し、その有用性を検討してきた¹⁾。しかし、バラスト材は碎石粒子の形状や配置の空間的不均一性に起因して、その弾塑性挙動には空間的なばらつきが存在する。そのため、著者らは、バラスト材の弾塑性挙動の空間的なばらつきを考慮した道床沈下量を評価するために、bounding body 近似に基づくスペクトル確率・弾塑性有限要素法を用いた解析を試みた³⁾。しかし、文献³⁾の方法では、定式化上の制約から、Young 率の空間的なばらつきの影響しか評価できていなかった。そこで本研究では、バラスト材の弾塑性挙動の空間的なばらつきを構成モデルの材料物性値の空間的なばらつきとして考慮した上で、Young 率以外の空間的なばらつきの影響を評価するために、Non-Intrusive Stochastic Projection(NISP)法⁴⁾を援用したスペクトル確率・弾塑性有限要素解析法を構成する。

2. Cyclic densification モデル

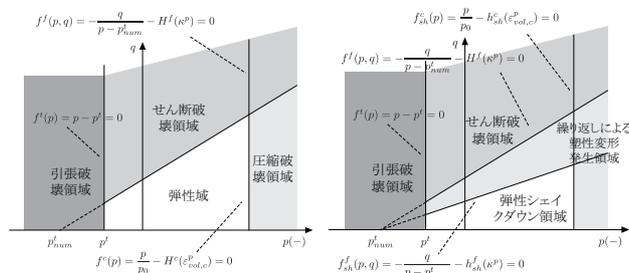
バラスト材の弾塑性構成モデルとして用いる cyclic densification モデル²⁾は、無荷重状態から最大外力作用時までのつり合い解を得るために用いる「単調荷重モデル」と、最大外力繰り返し作用時のつり合い状態の変化を追跡するのに用いる「繰り返し荷重モデル」の2つから構成される。

単調荷重モデルでは、 t を制御変数とした非弾性構成式を用いる。

$$\frac{d\sigma_{ij}}{dt} = D_{ijkl} \left(\frac{d\varepsilon_{kl}}{dt} - \frac{d\varepsilon_{kl}^p}{dt} \right), \quad (1)$$

ここで、 σ_{ij} は応力テンソル、 ε_{kl} は全ひずみテンソル、 ε_{kl}^p は塑性ひずみテンソルである。 ε_{kl}^p は非関連流動則と図1(a)に示す修正 Drucker-Prager モデルの降伏条件、内部状態変数の発展則から定められる。

一方、繰り返し荷重モデルでは、荷重・除荷繰り返し数



(a) 単調荷重モデルの降伏面形 (b) 繰り返し荷重モデルの破壊
 形状 面形状

図1 Cyclic densification モデルにおける降伏面・破壊面形状

N を制御変数とした次の非弾性構成式を用いる。

$$\frac{d\sigma_{ij}}{dN} = D_{ijkl} \left(\frac{d\varepsilon_{kl}}{dN} - \frac{d\varepsilon_{kl}^p}{dN} \right), \quad (2)$$

なお、繰り返し荷重モデルでは、塑性ひずみテンソル ε_{kl}^p は非関連流動則と図1(b)に示す形状を有する破壊条件、および内部状態変数の発展則から定められる。なお、当該モデルで用いられる諸式の詳細は文献²⁾で確認されたい。

3. NISP 法を援用したスペクトル確率・弾塑性有限要素法

連続体の変形挙動を cyclic densification モデルでモデル化し、準静的条件下でのつり合い問題を考える。構成モデルの材料物性値に空間的なばらつきが存在するものとした上で、仮想仕事式を有限要素法で離散化すると、次の接線剛性方程式を得る。

$$[{}^n \mathbf{K}^{(j)}(\omega)] \{d\mathbf{U}^{(j+1)}(\omega)\} = \{{}^n \bar{\mathbf{F}}^{ext}\} - \{{}^n \mathbf{F}^{int(j)}(\omega)\}, \quad (3)$$

ここで、 ω は確率事象、 \mathbf{K} は接線剛性行列、 $d\mathbf{U}$ は変位増分ベクトル、 $\bar{\mathbf{F}}^{ext}$ は外力ベクトル、 \mathbf{F}^{int} は内力ベクトルである。 n は荷重制御ステップ数、 (j) は Newton-Raphson 反復回数である。

ここで、 \mathbf{K} 、 \mathbf{F}^{int} 、 $d\mathbf{U}$ を次式のように polynomial chaos(PC) 展開する。

$${}^n \mathbf{K}^{(j)}(\omega) = \sum_{m=0}^{L-1} {}^n \mathbf{K}_m^{(j)} \Psi_m(\omega), \quad (4)$$

$${}^n \mathbf{F}^{int(j)}(\omega) = \sum_{m=0}^{L-1} {}^n \mathbf{F}_m^{int(j)} \Psi_m(\omega),$$

$$d\mathbf{U}^{(j+1)}(\omega) = \sum_{l=0}^{L-1} d\mathbf{U}_l^{(j+1)} \Psi_l(\omega) \quad (5)$$

式(4), (5)を式(3)に代入し, 両辺に Ψ_i を乗じて期待値をとると,

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{L-1} \sum_{l=0}^{L-1} \langle \Psi_i \Psi_m \Psi_l \rangle [{}^n \mathbf{K}_m^{(j)}] \{d\mathbf{U}_l^{(j+1)}\} \\ & = \langle \Psi_i \rangle \{ {}^n \bar{\mathbf{F}}^{ext} \} - \sum_{m=0}^{L-1} \langle \Psi_i \Psi_m \rangle \{ {}^n \mathbf{F}_m^{int(j)} \}, \end{aligned} \quad (6)$$

ただし, $i = 0, 1, \dots, L-1$ である. \mathbf{K} , \mathbf{F}^{int} の PC 展開係数は, 式(4)第1式・第3式の両辺に Ψ_i を乗じて期待値を取ることで次式のように評価できる.

$$\begin{aligned} [{}^n \mathbf{K}_m^{(j)}] & = \frac{1}{\langle \Psi_m^2 \rangle} \langle [{}^n \mathbf{K}^{(j)}(\omega)] \rangle, \\ & = \frac{1}{\langle \Psi_m^2 \rangle} \sum_e \left[\int_{V_e} [\mathbf{B}_e^T] \langle [{}^n \mathbf{C}_e^{ep(j)}(\omega)] \rangle [\mathbf{B}_e] dV \right] \\ \{ {}^n \mathbf{F}_m^{int(j)} \} & = \frac{1}{\langle \Psi_m^2 \rangle} \langle \{ {}^n \mathbf{F}^{int(j)}(\omega) \} \rangle \\ & = \frac{1}{\langle \Psi_m^2 \rangle} \sum_e \left\{ \int_{V_e} [\mathbf{B}_e^T] \langle \{ \sigma_e^{(j)}(\omega) \} \rangle dV \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

ここで, σ_e は要素での応力, $[{}^n \mathbf{C}_e^{ep(j)}]$ は要素での接線弾塑性係数テンソルである.

なお, 式(7)において, $\langle [{}^n \mathbf{C}_e^{ep(j)}(\omega)] \rangle$, $\langle \{ \sigma_e^{(j)}(\omega) \} \rangle$ の計算においては, 空間的ばらつきを有する材料物性値 \tilde{p} は, n 個の材料物性値のうちのいずれか一つであるものとして(すなわち $\mathbf{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, \tilde{p}\}$ として), \tilde{p} を次式の Karhunen-Loeve 展開で与えるものとする.

$$\tilde{p}(\omega, \mathbf{x}) = \langle \tilde{p} \rangle \left[1 + \sum_{k=1}^{N_{KL}} \xi_k(\omega) \sqrt{\lambda_k} f_k(\mathbf{x}) \right] \quad (8)$$

ただし, ξ_k は確率変数, λ_k , $f_k(\mathbf{x})$ はそれぞれ共分散関数 C の固有値と固有関数である. さらに, ξ_k についての積分計算は Gauss-Legendre 公式を用いた数値積分で処理する. 各積分点での接線弾塑性係数や応力値の計算は決定論的に処理できることから, 既存の解析コードを有効活用できる.

4. 解析結果

上述の手法を用いて, バラスト材の弾塑性挙動の空間的ばらつきが道床沈下量解析結果に及ぼす影響について検討する. 解析は図2に示す領域および境界条件の下で行った. 今回の解析では, 上述の手法による解析の特徴を把握することにも留意し, 単調載荷過程のつり合い計算を検討の対象とした. 弾性構成式は線形性を仮定し, 空間的ばらつきを考慮する材料物性値には Young 率 E を考えることとした. E の共分散関数 C は, 空間的ばらつきを x_1 軸方向にのみ考慮して, 次式で与えた.

$$C(x_1, y_1) = \sigma_E^2 \exp \left[-\frac{|y_1 - x_1|}{b_1} \right], \quad (9)$$

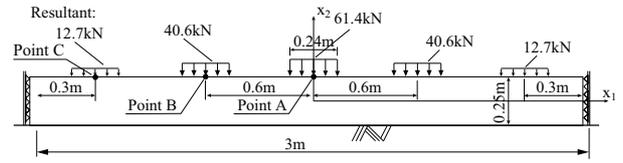


図2 解析条件

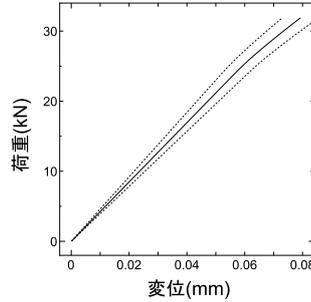


図3 A点における荷重変位曲線の期待値および変動範囲(変動係数 $\delta_E = 1\%$)

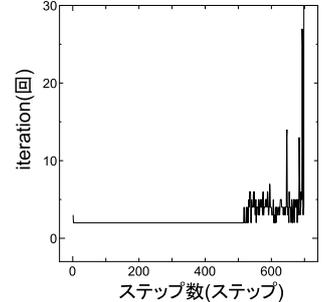


図4 各荷重ステップにおける Newton-Raphson 反復回数の推移

ここで, σ_E は Young 率の標準偏差であり, b_1 は相関長さである. なお, 解析では $\sigma_E = 0.1 \langle E \rangle$, $b_1 = 1(\text{m})$, $N_{KL} = 1$ と設定した. また, 材料物性値の期待値は既往の研究成果を参考に設定した.

図1中のA点における荷重変位曲線の期待値および $\pm\sigma$ の変動範囲を図3に示す. Young 率の変動係数を1%として解析を行った場合, 荷重に対する変位の値に数%のばらつきが生じた. ただし, 作用外力が増大して塑性変形が卓越してくると系全体のつり合いを課すための反復計算の収束が緩慢となり, 設定した解析ステップ数の7割程度で収束解が得られなくなった. これは, 本解析における接線弾塑性係数の評価精度が原因であると考えられる. 今後, 弾塑性モデルの他の物性値の空間的ばらつきの影響を検討する際には, 解析の安定性にも留意が必要である.

謝辞

本研究は JSPS 科研費 15K06177 の助成を受けたものです.

参考文献

- 1) 相田真人, 紅露一寛, 阿部和久: まくらぎの浮きを考慮した軌道振動・道床沈下連成解析, 土木学会鉄道工学シンポジウム論文集, Vol.19, pp.127-134, 2015.
- 2) Suiker, A.S.J. & de Borst, R.: A numerical model for the cyclic deterioration of railway tracks. *Int.J.Numer.Meth.Engng.*, Vol.57, pp.441-470, 2003.
- 3) 紅露一寛, 井口建斗, 阿部和久: Cyclic densification モデルに基づくバラスト道床沈下解析におけるバラスト材の Young 率の空間変動の影響. 計算数理工学論文集, Vol.16, pp.7-12, 2016.
- 4) 中川英則: 1, 2次元確率変数を含む弾塑性問題および有限変形問題への NISP 確率有限要素法の適用. 土木学会論文集 A2 (応用力学), Vol.73, No.2, pp.1.245-1.254, 2017.