

Consistent Mass Matrix を用いた MPM の計算精度に関する数値実験

京都大学大学院 学生 奥田 貴矢

京都大学大学院 正会員 ○西藤 潤

1. はじめに

一般的な MPM(Material Point Method)の定式化では、連続体の境界付近で変位あるいは速度が正しく計算されないことがある。本研究では、その理由が一般的な MPM で使われている Lumped Mass Matrix であることを示す。比較のため、Consistent Mass Matrix を用いる方法と 2 つの Mass Matrix を重みづけ平均したものをを用いる方法でも計算を行う。

2. 定式化

一般的な MPM の定式化を用いる。MPM の定式化は FEM と同様に仮想仕事の原理を用いる。FEM と異なり、MPM は連続体を粒子で離散化し、そのそれぞれの粒子に質量が集中している (Delta 関数で表現する) と考える。また、MPM では粒子だけでなくバックグラウンドの固定した格子も使い、粒子と格子点間で物理量をやり取りしながら逐次計算を行う。MPM では、通常、陽的計算で計算が行われるため、得られた Mass Matrix を対角成分に集める Lumped Mass Matrix を用いられる。しかし、Lumped Mass Matrix を用いると、境界付近での計算精度が落ちる。例えば、粒子の物理量を格子点に移す際に、境界付近では十分な数の粒子が格子点周辺に配置されていない場合、格子点の物理量は内挿計算ではなく、外挿計算によって得られることになる。Lumped Mass Matrix を用いる MPM の定式化では、この外挿計算は重み付き平均の式で計算されるため、外挿される格子点の物理量は内挿される粒子の物理量よりも大きく、あるいは小さくなり得ない。これにより、正しく外挿されないことになり、境界付近での精度が著しく低下する。この粒子と格子点の間での精度低下を避けるため、「本研究では Consistent Mass Matrix を用いる方法 (提案手法 1)」と「境界付近だけ Consistent Mass Matrix を使い、内部は Lumped Mass Matrix を用いる方法 (提案手法 2)」を試した。提案手法 2 は内部で Lumped Mass Matrix を用いているため、提案手法 1 と比較すると計算時間が短いという利点を有している。なお、粒子が格子間をまたぐ際の計算精度の低下 (Cell Crossing Instability) による影響を除外するため、Total Lagrangian に基づく定式化を行う。Total Lagrangian に基づく定式化では、粒子の初期配置を元に変形勾配を計算するため、Cell Crossing Instability は発生しない。

3. 数値解析例

図-1 のような直方体の超弾性体を考える。構成式は St. Venant-Kirchhoff モデルを使い、物性は密度 7000 kg/m^3 , $\lambda = 5.78 \text{ MPa}$, $\mu = 3.85 \text{ MPa}$ とし、重力は考えない。また MPM 法を用いるために間隔 0.25 m で $40000 (20 \times 20 \times 100)$ 個の粒子を配置する。底面の中心を原点として間隔 1 m で格子を設定する。解析ではすべての粒子に対して y -方向に初速 2.0 m/s を与え、 $x = 0$ の面を固定し、振動させる。図-2 に、直方体上部の縁上のある粒子点における鉛直方向変位を示す。提案手法 1 および 2、従来の MPM による手法、FEM の 4 つの方法を用いて計算した。FEM は MPM で用いた格子を要素として計算している。また、FEM では Lumped Mass Matrix を用いても精度低下は限定的であるため、Lumped Mass Matrix を用いて計算した。図-2 より分かるように、従来の MPM 法によって得られた結果は、他の FEM による結果と乖離している。一方で、提案手法 1 および 2 は FEM とよく一致した結果を示している。また、提案手法 1 と提案手法 2 はよく一致しており、両者に大きな差はない。図-3、図-4 は計算途中における、ある断面の粒子配置である。図-3、図-4 はそれぞれ、従来

キーワード Material Point Method, Consistent Mass Matrix, Lumped Mass Matrix

連絡先 〒615-8540 京都府京都市西京区京都大学桂 C TEL 075-383-3181

の MPM と提案手法 1 の計算結果である。Lumped Mass Matrix を用いた計算では境界付近で粒子の配置が不自然なものとなっている様子が分かる。一方で、Consistent Mass Matrix を用いた場合は、粒子は乱れることなく、整然と並んだまま挙動を示していることが分かる。

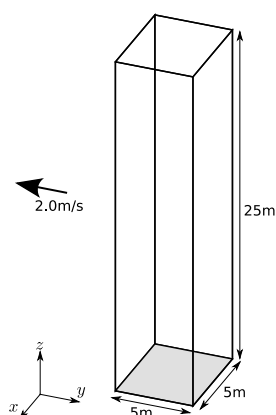


図-1 問題の設定

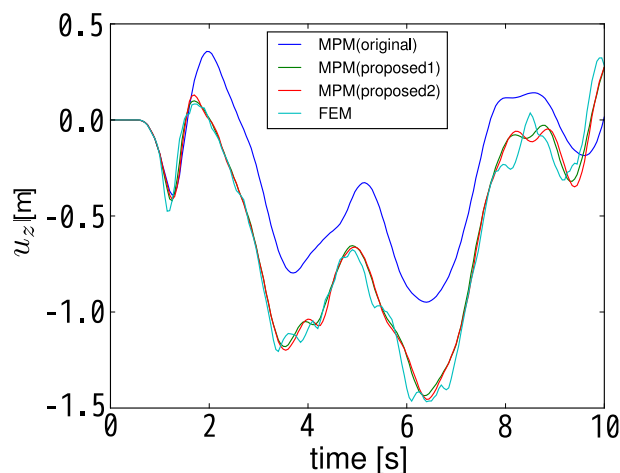


図-2 角柱上部における鉛直方向変位

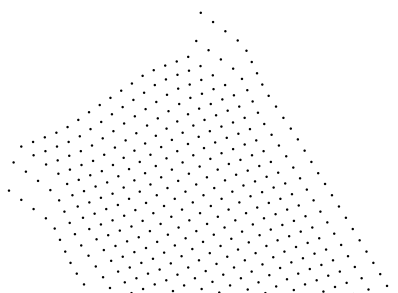


図-3 Lumped Mass Matrix を用いた時の計算結果
(角柱上部の拡大した断面図)

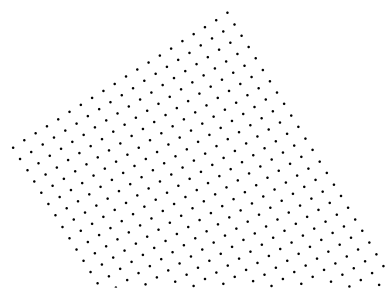


図-4 Consistent Mass Matrix を用いた時の計算
結果 (角柱上部の拡大した断面図)

4. まとめ

数値実験によって、Lumped Mass Matrix を用いた場合、問題によっては境界周辺で大きな乱れが生じることが分かった。解決方法として、定式化で得られる Consistent Mass Matrix を Lumped Mass Matrix に変換せず、そのまま用いる方法、および境界上のみで用いる方法を示した。いずれの方法も精度向上を示したが、陰解法となるため、計算時間が増大することが分かった。今後は、陰解法で解くことを前提として、Newmark の β 法などと組み合わせて解くことを検討している。また、GIMP など Cell Crossing Instability を解決する手法と組み合わせて、本手法を Updated Lagrangian に適用したいと考えている。

参考文献

・Sulsky, D., Chen, Z. and Schreyer, H. L. : A particle method for history-dependent materials, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 118, No. 1-2, pp. 179-196,