

ばね質点系アナロジーによる道路ネットワーク脆弱性解析手法の解釈について

金沢大学大学院

金沢大学

西日本高速道路(株)

金沢大学

学生会員

正会員

正会員

○坪川秀太郎

小林俊一

若林桂汰

中山晶一郎

1. はじめに

道路ネットワークは社会活動の基本となる人・モノの流動を担う重要な社会基盤である。大規模な地震災害によって、ひとたびその機能が損なわれれば社会活動が大いに停滞することは、阪神淡路大震災(1995)、東日本大震災(2011)などの事例からも明白である。

脆弱性については、道路整備の際の重要な指標であるため、従来から多くの研究がおこなわれてきた。特に災害時のネットワークの接続性については、災害の不確実性やカストロフ性を背景に確率論を用いない評価法も検討されており、一般に脆弱性解析と呼ばれる¹⁾。この脆弱性解析では、ネットワークとしての形状や特性を考慮し、所期のネットワークの機能維持を明確にした上で、リンク脆弱性を評価する必要があると考える。

さて、著者らは、ネットワークの接続性とばね質点系の運動方程式が数学的に全く同一の形式であることを指摘し、その類似性に着目したネットワークの脆弱性解析法について検討を進めている²⁾。本報告では、ばね質点系アナロジーによる道路ネットワークの脆弱性解析手法の解釈について報告する。

2. ネットワークとばね質点系のアナロジー

(1) 隣接行列とラプラシアン行列³⁾

道路ネットワークにおいてノード間を接続するリンクは隣接行列 A で記述される。その成分 a_{ij} はノード i, j が接続するときはリンク距離 l_{ij} の関数、非接続の場合は0である。本研究ではリンク距離の逆数を用いる。ノード i に接続するリンクの重みの和 $\sum_j a_{ij}$ を次数 d_i と呼び、次数を対角成分にもつ行列を次数行列 D と呼ぶ。ラプラシアン行列 L は隣接行列 A と次数行列 D を用いて以下で定義される。

$$L = D - A \quad (1)$$

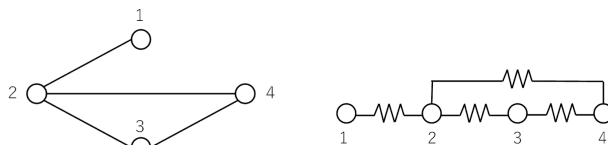


図-1 道路ネットワークの例題と等価な1次元バネ質点系

リンク距離を単位距離とすれば、図-1に示すネットワークのラプラシアン行列は以下の通り。

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

一方、ばね定数 k 、質点質量 m が一定値の場合、質点に外力 F を受ける図-1のバネ質点系の運動方程式は以下の通りである。

$$m \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \\ \ddot{u}_4 \end{Bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = F \quad (3)$$

グラフ理論では、ラプラシアン行列の第2最小固有値の固有ベクトルを用いたグラフカットが比率最小分割となることが知られており、これをフィードラーベクトルと呼ぶ。これはバネ質点系の自由振動問題の最低次モードに対応している。

(2) リンク脆弱性解析手法

図-1に示すバネ質点系はディリクレ境界条件が課されていない。一方、本研究では期待する機能レベルとして拠点ノードどうしの接続性を想定し、斉次ディリクレ境界条件（つまりゼロ変位＝固定境界条件）を付与する方法を用いる。一方の拠点ノード I のみに単位量（力学的には単位の強制変位）、もう一方の拠点ノードにはゼロを与えるディリクレ境界条件の下ではばね質点系の静的解析を実施する。例えば、図-1において、ノード

ド1に強制変位1を与え、ノード3を固定するケースを考える．実際の計算としては、式(3)の加速度項を無視し、ディリクレ境界条件についてペナルティ法を適用すれば、式(3)は以下の形で表すことができる．

$$k \begin{bmatrix} 1+M & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2+M & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \times 1 \\ 0 \\ M \times 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

ここに M はペナルティ定数で十分に大きな正の数を与える．

得られる解は、特定の拠点ノードに与えられたインパクトが、静的平衡状態を保ちながら残りの拠点ノードに伝播することを意味する．

得られた変位解からリンク j の伸び量の絶対値 $|d_j^I|$ を影響度として評価する．これを拠点ノード I に関するストレステストと呼ぶ．

(3) 脆弱性評価手法の解釈

この解析において、得られるばね張力は、各ノードにおいてつりあう．つまり、強制変位による外的刺激が各ばねに配分されていることを意味しており、(各ばねに配分された刺激) = (ばね張力) である．

本研究では、災害時の斜面崩壊等による道路被災リスクを考慮し、リンク長が長いリンクをより脆弱と考える．同じ大きさの刺激に対して長いリンクは刺激に弱く、短いリンクは強く評価するため、リンク特性を表現するばねのばね定数を $k = 1/l_{ij}$ とリンク長 l_{ij} の逆数を用いる．こうすることで、長いリンクほど刺激に対して弱く、伸びやすくなるので、リンク脆弱性とばねの伸びを関係づけることができる．

3. ネットワーク解析例

解析例として、図-2と図-3に示すネットワークを取り上げる．図-2はリンク長をすべて1とし、図-3はノード4-7間のリンクのみ1でそれ以外を2とした．拠点ノードはどちらもノード1と6を選んだ．

図-2に示した解析結果より、ノード4-7間のリンクのリンクストレス値が大きく、最も脆弱である．ネットワーク構造からみても、このリンクが切れると拠点ノード間の連結が途切れることから、拠点間の連結性との関連が最も高いリンクである．一方、ネットワーク例2はノード4-7間のリンク以外リンクストレス値が増加し、相対的にノード4-7間のリンクのリンクストレス値が減少した．ノード4-7間以外のリンク長が長くなったことにより、刺激に対して弱くなり脆弱性

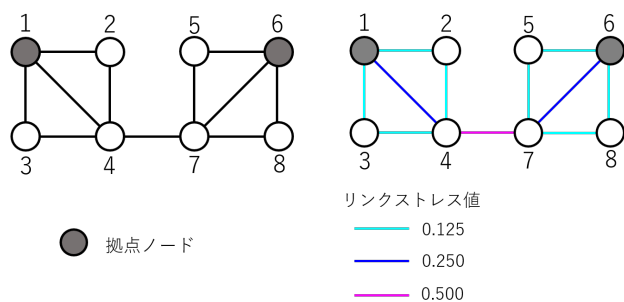


図-2 サンプルネットワーク 1

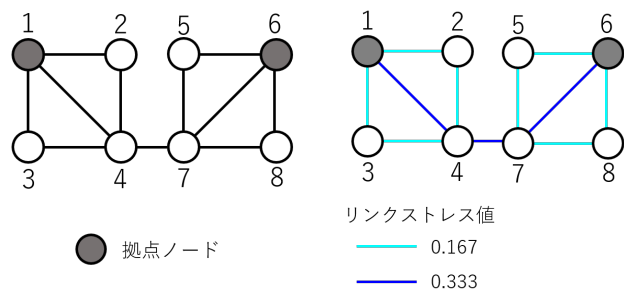


図-3 サンプルネットワーク 2

が増した結果となった．以上より、ばねの伸び量が、道路ネットワークにおける拠点間の連結性を反映したうえで、リンク長の影響を考慮した脆弱性の指標となっていることがわかる．

4. まとめ

ばね質点系の外的刺激によるばね伸び量と道路ネットワークの脆弱性の関係から、バネ質点系アナロジーによる道路ネットワーク脆弱性解析手法の解釈について説明した．今回はリンク脆弱性とばねの伸び量を関係づけるため、ばねのばね定数としてリンク長の逆数を用いたが、今後はばね定数のリンク長による重みづけについて検討を加え、拠点ノードの選定方法や、リンクのリスク要因である斜面や地盤などに起因する重みの精緻化やそれらを考慮した解析について検討し、道路維持管理戦略の意思決定に資する方法に高めていきたい．

謝辞: 本研究の一部は国土交通省新道路技術会議において採択され、国土交通省国土技術政策総合研究所の委託研究により実施した．謝意を表する．

参考文献

- 1) 中山晶一郎, 朝倉康夫 編著: 道路交通の信頼性評価, 15章, コロナ社, 2014.
- 2) 若林桂汰, 小林俊一, 中山晶一郎: 固有ベクトル中心性の概念を拡張したネットワーク分割手法の提案, 土木計画学研究・講演集, Vol.56, P73, 2017
- 3) 斎藤直樹: グラフ・ネットワーク上での応用調和解析, 応用数理, Vol. 25, No. 3, pp. 1-15, 2015.