

## 2次錐計画を用いた斜面の安定係数評価

|            |      |       |
|------------|------|-------|
| 金沢大学大学院    | 学生会員 | ○山栗祐樹 |
| 大日本コンサルタント |      | 武村洸希  |
| 金沢大学       | 正会員  | 小林俊一  |
| 京都大学大学院    | 正会員  | 西藤 潤  |
| 金沢大学       | 正会員  | 松本樹典  |

## 1. はじめに

支持力問題や斜面の安定問題、土圧問題を解く数値解析手法の1つに剛塑性有限要素法がある。近年筆者らは混合型解法<sup>1)</sup>の改善を目的に2次錐計画に基づく剛塑性有限要素法を提案している<sup>2),3)</sup>。提案手法は偏差応力テンソルの第2不変量  $J_2$  で書くことができる降伏関数を使用し、定式化した剛塑性境界値問題を汎用最適化ソルバー Gurobi Optimizer<sup>4)</sup>(以後, Gurobi)によって解くという特徴を有する。

これまでに、3次元の簡単な要素挙動シミュレーションを通して提案手法の有効性を確認している。今回、提案手法の地盤工学問題への適用を目指し、3次元の斜面の安定解析を行った。本報告では、解析を行う際に導入した安定化パラメータと斜面の安定解析結果について述べる。

## 2. 2次錐計画に基づく剛塑性有限要素法

## (1) 下界法による定式化

本手法では剛塑性境界値問題を極限定理に基づく下界法によって定式化する。下界法では、応力場を未知量とし、力の釣合い条件を満足し、降伏条件を破らない範囲で最大の荷重係数を与える応力場を求める方法である。また、降伏関数には Von-Mises モデル (Mises モデル)、Drucker-Prager モデル (DP モデル) を使用する。したがって、下界法は以下の2次錐計画問題として定式化できる。

$$\begin{aligned} & \text{Find } \max_{\sigma, \alpha, p} \alpha \\ & \text{s.t. } \begin{cases} \text{釣合い式: } B^T \sigma = \alpha \Gamma_0 + \Gamma_c + D_d^T p \\ \text{降伏条件 (DP モデル): } J_2^e \leq (k - \alpha' I_1^e)^2 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

ここに  $\sigma$  は応力場、 $\alpha$  は荷重係数、 $p$  はディリクレ反力、 $B$  は係数行列、 $\Gamma_0$  は基準荷重、 $\Gamma_c$  は一定荷重、 $D_d$  はディリクレ条件に関する行列、 $I_1$  は応力テンソルの第1不変量、 $k, \alpha'$  は材料パラメータでありモル・クーロンの破壊規準と関連付けられる。材料パラメータ  $\alpha'$  を0とすれば Mises モデルであり、DP モデルと同様に2次錐制約であることが分かる。

本手法では式(1)を最適化ソルバー Gurobi によって解いた。また、空間離散化については変位場を3次元の定ひずみ四面体要素で、応力場を面ベースで行った。

(2)  $J_2$  における安定化項の導入

偏差応力テンソルの第2不変量  $J_2$  は以下のように変形することができる。

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{6} \sigma \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \sigma \\ &= \frac{1}{6} \sigma \cdot Q \sigma \quad (2) \end{aligned}$$

ここに  $Q$  は半正定値対称行列である。半正定値対称行列であることはゼロ固有値を有することを意味し、逆行列  $Q^{-1}$  が存在しない。応力場  $\sigma$  を未知量とする本定式では、 $Q$  を使用することで数値的不安定が生じる可能性がある。そこで、ゼロ固有値に対する固有ベクトル  $a_0$  による安定化項  $\varepsilon a_0 \otimes a_0$  を付加し、 $Q'$  の正定値化を行った。

$$Q' = Q + \varepsilon \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

ここに  $\varepsilon$  を安定化パラメータと呼び、十分小さな正の値を用いる。

## 3. 数値解析例

## (1) 安定化パラメータについて

安定化項の効果を確認するために、1軸圧縮シミュレーションを実施した。その結果、安定化パラメータ  $\varepsilon = 0.01$  のとき、荷重係数が理論解と一致していることや均一な応力場が得たことを確認し、本手法において安定化項の導入は効果的であることを確認した。このことを踏まえ、安定化パラメータ  $\varepsilon = 0.01$  を使用する。

## (2) 斜面の安定解析

### a) 問題の概要

図-1 に示すような 3 次元の地盤を対象として斜面の安定解析を実施した．荷重条件として鉛直下向きに基準となる自重  $\Gamma_0$  と荷重係数  $\alpha$  を乗じたものを与え，地盤が崩壊するときの荷重係数  $\alpha$  を求める．材料パラメータは平面ひずみ状態で土の強度定数と関連付け，粘着力  $c=10[\text{kN/m}^2]$  とし内部摩擦角  $\phi$  を  $0^\circ$  から  $25^\circ$  まで  $5^\circ$  刻みで変化させた．また，斜面の角度  $\beta = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$  の 4 ケースで解析を実施した．

### b) 解析結果

得られた荷重係数から安定係数  $N_s$  を次式より求めた．

$$N_s = \frac{\alpha \gamma_0 H}{c} \quad (4)$$

ここに， $\gamma_0$  は地盤の単位体積重量， $H$  は斜面の限界高さであり，今回  $\gamma_0 = 16[\text{kN/m}^3]$ ， $H = 3[\text{m}]$  とした．内部摩擦角  $\phi = 0^\circ$  における安定係数  $N_s$  の結果を図-2 に， $\phi > 0^\circ$  の場合を図-3 に示す．なお，図-3 については荷重係数と等式制約条件に関する双対変数（節点変位速度場）の両者に関する収束解が得られた結果をプロットしている．図-2，図-3 とともに斜面の角度  $\beta$  が小さくなるにつれて，安定係数  $N_s$  の値が増加する傾向にある．しかし，どちらもテイラーの安定図表<sup>5)</sup>と比べて大きな値を示している．

斜面の変形図の一例を図-4 に示す．図より，直立壁が自由面側にはらみ出す速度場が生じているが，左下端部のノードが固定境界条件となっているため，ここで変形が拘束されている．今回のメッシュでは特異点回りの処理は特に行わなかったが，精度の良い解を得るためには，特異点回りの処理など要素分割にも十分に配慮しなければならないことを意味している．

## 4. おわりに

本報告では，2 次錐計画に基づく剛塑性有限要素法の地盤工学問題への適用の一例として，斜面の安定解析を実施した．一連の解析結果から本手法はまだ改善・検討の余地があると言える．

今後は，特異点周りの処理やメッシュの分割による影響を念頭に提案手法の改善を行っていきたい．

### 参考文献

- 1) Kobayashi, S.: *Soils and Foundations*, Vol. 45, No. 2, pp. 17-27, 2005.
- 2) 山栗，小林ら：第 52 回地盤工学研究発表会，CD-ROM，2017.
- 3) 山栗，小林ら：土木学会論文集 A2（応用力学），Vol.73, No.2, I.333-I.342, 2017.

- 4) Gurobi Optimizer: <http://www.gurobi.com/>, 2018 年 3 月 15 日アクセス.
- 5) 岡二三生：土質力学演習，森北出版，pp.247, 1995.

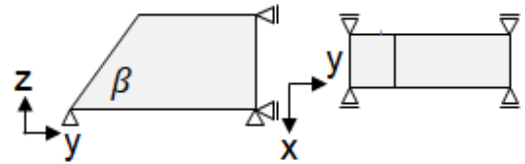


図-1 対象とする斜面と境界条件（左：断面図，右：平面図）

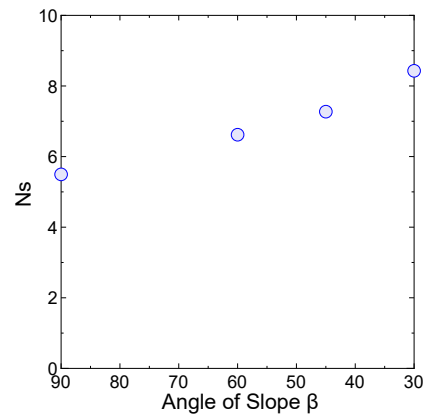


図-2  $\phi = 0^\circ$  における安定係数  $N_s$

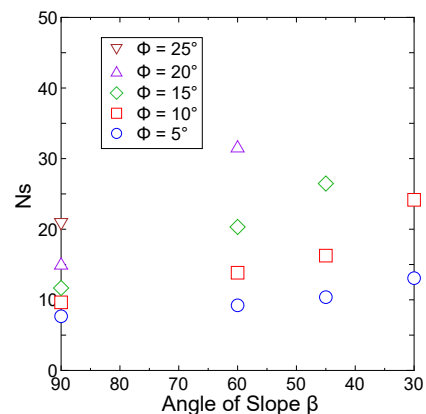


図-3  $\phi > 0^\circ$  における安定係数  $N_s$

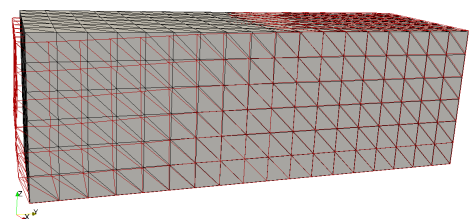


図-4 斜面の角度  $\beta = 90^\circ$  における変形図 ( $\phi = 0^\circ$ )