

バセット履歴項の効率的計算法の精度検証

静岡大学 学術院工学領域 数理システム工学系列 正会員 ○横嶋 哲

静岡大学 工学部 数理システム工学科

非会員 渡辺 滯

1. はじめに

非一様な流れ中の単一の剛な微小球形粒子に対する運動方程式である Maxey-Riley 方程式¹⁾ は式 (1)

$$m_p \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = 6\pi a \mu (\mathbf{u} - \mathbf{v}_p) + m_f \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - (m_p - m_f)g\mathbf{e}_z + \frac{1}{2}m_f \left(\frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} \right) + 3\sqrt{3\mu a m_f} \int_{-\infty}^t \frac{\frac{d\mathbf{u}}{d\tau} - \frac{d\mathbf{v}_p}{d\tau}}{\sqrt{t - \tau}} d\tau \quad (1)$$

で与えられる. ここで a , m_p , $\mathbf{v}_p(t)$ は粒子の半径, 質量, 速度を, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ は流速場を, μ は流体粘度, m_f は粒子と同体積の流体塊の質量を, $\mathbf{e}_z$ は重力加速度 (絶対値 g) の作用反対方向の単位ベクトルを表す. 右辺第 1 項はストークス抗力, 第 2 項は圧力勾配力, 第 3 項は重力, 第 4 項は付加質量力, 第 5 項はバセット履歴力をそれぞれ表す. 付加質量項を分割して, $d\mathbf{v}_p/dt$ と $D\mathbf{u}/dt$ を含む項をそれぞれまとめて整理すれば,

$$\frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = \frac{\mathbf{u} - \mathbf{v}_p}{\tau_p^*} + \beta \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - (1 - \beta)g\mathbf{e}_z + \sqrt{\frac{3\beta}{\pi\tau_p^*}} \int_{-\infty}^t \frac{\frac{d\mathbf{u}}{d\tau} - \frac{d\mathbf{v}_p}{d\tau}}{\sqrt{t - \tau}} d\tau \quad (2)$$

を得る²⁾. ここで $\beta \equiv 3/(2\gamma + 1)$, $\gamma \equiv m_p/m_f$, $\tau_p^* \equiv (3\tau_p/(3 - \beta))$ を表し, $\tau_p (\equiv m_p/(6\pi a \mu))$ は十分に重い (i.e., $\gamma \gg 1$) 場合の粒子緩和時間である. (i) $\gamma \rightarrow \infty$ の場合, $\beta \rightarrow 0$ となって, 式 (2) の右辺第 2 項 (圧力勾配項と呼称), 第 4 項 (バセット履歴項) は他の項と比較して小さい. (ii) $\gamma \rightarrow 1$ の場合, $\gamma = 1$ の極限で中立浮遊状態となって右辺第 3 項 (重力項) のみが無視できる反面, 圧力勾配項もバセット履歴項も同様に重要である. (iii) 例えば $\gamma = 100$ の場合, $\sqrt{\beta}$ は β と比べてほぼ 2 桁大きくなり, 圧力勾配項は無視できるものの, バセット履歴項は考慮すべき状態となる. 水中での土砂粒子 ($\gamma \approx 2.6$) の場合, β と $\sqrt{\beta}$ は同オーダーで上述の (ii) の状況になる. しかしながらバセット項の計算には演算回数・記憶容量ともに高い負荷を伴うため, 先行研究の大半では無視されてきた. これには, 水流中の浮遊砂の振る舞いを Maxey-Riley 方程式 (以下, MR 方程式) に基づいてモデル化した Nabi *et al.*³⁾ も含まれる. 本報では, バセット履歴項も考慮したフル MR 方程式に基づく微小粒子混相流数値解析を行うことを目指して, 近年提案されたバセット履歴項の効率的計算法⁴⁾ を実装し, その基本的な精度検証を行う.

2. バセット履歴高の効率的な計算法

式 (2) の右辺第 4 項 (以下, $\mathbf{F}_B$ と記述) は, $c_B \equiv \sqrt{3\beta/(\pi\tau_p^*)}$, $\mathbf{g}(\tau) \equiv d(\mathbf{u} - \mathbf{v}_p)/d\tau$ を導入すれば, $\mathbf{F}_B = c_B \int_{-\infty}^t (\mathbf{g}/\sqrt{t - \tau}) d\tau$ と表される. カーネル $(t - \tau)^{-1/2}$ は時刻 τ が現時刻 t に近づくとき大きく, 遠い過去ほど小さな値をとるので, バセット項の計算の際には

$$\mathbf{F}_B = \underbrace{c_B \int_{t-t_{\text{win}}}^t \frac{\mathbf{g}(\tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau}_{\mathbf{F}_{B,\text{win}}} + \underbrace{c_B \int_{-\infty}^{t-t_{\text{win}}} \frac{\mathbf{g}(\tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau}_{\mathbf{F}_{B,\text{tail}}} \quad (3)$$

のように積分区間を分け (一般に $t_{\text{win}} \ll t$), $\mathbf{F}_{B,\text{tail}}$ を無視することが行われてきた^{5,6)}. しかしながらカーネル $(t - \tau)^{-1/2}$ は τ の低下とともに非常にゆっくりと減衰するため, この近似の導入は慎重になされるべきである. 本研究で導入する, van Hinsberg *et al.* の効率的なバセット項の計算法⁴⁾ の核心は, カーネルの重要性が相対的に低下する $\mathbf{F}_{B,\text{tail}}$ において $(t - \tau)^{-1/2}$ を指数関数で近似することで, $\mathbf{F}_{B,\text{tail}}$ を再帰的に評価できるようにした点にある. すなわち,

キーワード Maxey-Riley 方程式, バセット履歴項, 微小粒子混相流

連絡先 〒432-8561 浜松市中区城北 3-5-1 静岡大学 工学部 数理システム工学科 Phone 053-478-1258

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{B,\text{tail}} &\approx c_B \int_{-\infty}^{t-t_{\text{win}}} a \exp \{-b(t-\tau)\} \mathbf{g}(\tau) d\tau \\
&= c_B \underbrace{\int_{(t-\Delta t)-t_{\text{win}}}^{t-t_{\text{win}}} a \exp \{-b(t-\tau)\} \mathbf{g}(\tau) d\tau}_{\mathbf{F}_{B,\text{tail,di}}} + c_B \int_{-\infty}^{(t-\Delta t)-t_{\text{win}}} a \exp \{-b(t-\tau)\} \mathbf{g}(\tau) d\tau \\
&= \mathbf{F}_{B,\text{tail,di}}(t) + \exp(-b\Delta t) c_B \int_{-\infty}^{(t-\Delta t)-t_{\text{win}}} a \exp \{-b((t-\Delta t)-\tau)\} \mathbf{g}(\tau) d\tau \\
&= \mathbf{F}_{B,\text{tail,di}}(t) + \exp(-b\Delta t) \mathbf{F}_{B,\text{tail}}(t-\Delta t)
\end{aligned} \tag{4}$$

のようにして積分区間を $(-\infty, t]$ から $[t-t_{\text{win}}-\Delta t, t]$ に狭められ, $\mathbf{F}_B$ の計算コストを大幅に削減できる. なお, 文献4) ではカーネルを指数関数で近似する際, $\sum_{i=1}^n a_i \exp \{-b_i(t-\tau)\}$ のように複数の指数関数を線形に重ね合わせることで, より広い範囲で近似精度を高める工夫がなされている.

3. 精度検証例

2. 節で示したバセット履歴項の効率的計算法の精度検証には, 先行研究^{4,7)}でも利用された定積分

$$F(t) = \int_0^t \frac{\cos \tau}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \tag{5}$$

を採用する. この積分の理論値は

$$F(t) = \sqrt{2\pi} \left[C \left(\sqrt{\frac{2t}{\pi}} \right) \cos t + S \left(\sqrt{\frac{2t}{\pi}} \right) \sin t \right] \tag{6}$$

で与えられる. ここで $C(x)$, $S(x)$ はそれぞれフレネル余弦/正弦積分を表す. $t = 50\pi$ として, 時間刻み幅 Δt の値を系統的に変化させて相対誤差を算出した. 結果を図1に示す. 誤差は Δt^2 にほぼ比例して減少しており, 時間2次精度であることが確認された.

講演時にはより詳細な精度検証結果を示す予定である.

参考文献:

- 1) Maxey & Riley, *Phys. Fluids*, **26**, 883, 1983. 2) van Hinsberg, Clerx & Toschi, *Phys. Rev. E*, **95**, 023106, 2017. 3) Nabi, de Vriend, Mosselman, Sloff & Shimizu, *Water Resour. Res.*, **49**, 4775, 2013. 4) van Hinsberg, ten Thije Boonkamp & Clerx, *J. Comput. Phys.*, **230**, 1465, 2011. 5) 杉山, 高木, 松本, 日本機械学会論文集, **70**(699)B, 2738, 2004. 6) Bombardelli, González & Niño, *J. Hydraul. Eng.*, **134**(10), 1513, 2008. 7) Moreno-Casas & Bombardelli, *Environ. Fluid Mech.*, **16**, 193, 2016.

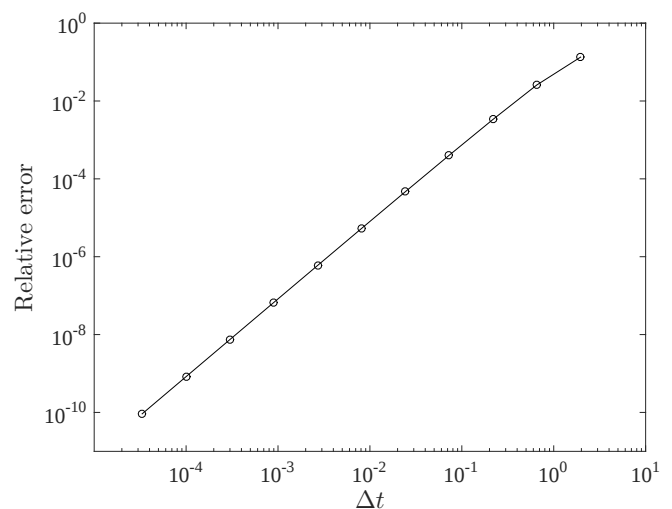


図1: 時間刻み幅 Δt の変化に対する相対誤差の振る舞い.