滑らかなヘヴィサイド関数に基づくレベルセット法の質量保存性について

静岡大学 学術院工学領域 数理システム工学系列 正会員 横嶋 哲
静岡大学 大学院総合科学技術研究科 数理システム工学コース 学生会員 ○石川 秀平
静岡大学 大学院総合科学技術研究科 数理システム工学コース 非会員 早瀬川 拓馬
関西電力株式会社 技術研究所 土木技術研究室 正会員 久末 信幸

1. はじめに

自由表面の大変形や気泡・液滴の分裂/合体を伴うような複雑な界面現象は自然界にも工業装置内にも遍在し，そのような現象を効率的かつ精度良く予測可能な手法がさまざまな分野で強く求められている．レベルセット法はそういった問題に対して最もよく利用される手法のひとつである[1)]．レベルセット法は界面法線や曲率を精度良く算出できる点が高く評価される反面，質量保存性の低さがたびたび問題視されてきた．この欠点の解消法として，例えば，レベルセット関数の再初期化の過程に質量保存に関する制約を組み入れる手法[2)]や，質量保存性に優れたVOF法とのカップリング[3)]，界面近傍でラグランジュ的にその挙動が追跡されるマーカー粒子の分布情報を用いて界面位置を修正する方法[4)]などが提案されてきたものの，コスト・パフォーマンスの観点から決定的と呼べるような手法は未だ得られていない．

レベルセット法では従来，界面情報を埋め込むスカラー関数として符号付き距離関数 ϕ が用いられてきた一方，Olsson & Kreiss[5)] はスカラー関数として

$$\psi(\vec{x},\, t) = \frac{1}{2}\left[\tanh\left(\frac{\phi\,(\vec{x},\, t)}{2\epsilon}\right) + 1\right] \tag{1}$$

を提案した．関数 ψ は ϕ が負の相でゼロ，他相で1の値を有し，界面は $\psi = 0.5$ の集合で表される．この分布は，注目する相の各計算セル内での占有率を表すVOF関数と似通っているものの，両者の相違は，パラメータ ϵ を $O(\Delta x)$（ここで Δx は界面近傍での計算格子幅）で与える限り，ψ は与えられた計算格子に対して必ず滑らかに分布（すなわち ψ は滑らかなヘヴィサイド関数）する点にある．ψ の計算領域全体での総量 $\int_V \psi dV$ は，$\epsilon \to 0$ の極限で $\phi < 0$ の相（以下，ある相と表記）の総体積を表す．ψ の移流方程式として発散型の次式

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u}\psi) = 0 \tag{2}$$

を用いれば，計算領域が閉じた系であれば，$\int_V \psi dV$ は必ず保存される．Olsson & Kreiss のアプローチでは $\epsilon = O(\Delta x)$ であるので，$\int_V \psi dV$ はある相の総体積とは厳密には一致しないものの，その近似値ではあることを考慮すれば，このアプローチによって質量保存性の向上が期待でき，Olsson & Kreiss はこの議論の有効性を実証したものと捉えられる．

本研究では Olsson & Kreiss のアプローチの拡張と位置づけられる，Desjardins *et al.*[6)] の ACLS（Accurate Conservative Level Set）法を実装し，その質量保存性について従来のレベルセット法との比較検討を行った．

2. 支配方程式の離散化

移流方程式 (2) の離散化は Desjardins *et al.*[6)] に倣った．すなわち，時間積分は2次精度クランク・ニコルソン法を用いて陰的に行い，得られた方程式を ADI 法によって方向分離して解いた．移流項の空間離散化には，有限体積（FV）法補間に基づく HOUC（High Order Upstream Central）スキーム[7,8)]を用いた．3次精度の HOUC-FV スキームを用いた場合には各方向に最大で5重対角行列が，5次精度スキームでは7重対角行列が形成されるため，上述の方向分離で得られた連立方程式をそれぞれに対応した多重対角行列解法アルゴリズムによって反復無しに解いた．HOUC スキームの詳細については参考文献を参照されたい．

キーワード　レベルセット法，ACLS 法, 質量保存性, HOUC スキーム
連絡先　〒432-8561 浜松市中区城北 3-5-1　静岡大学 工学部 数理システム工学科　Phone 053-478-1258

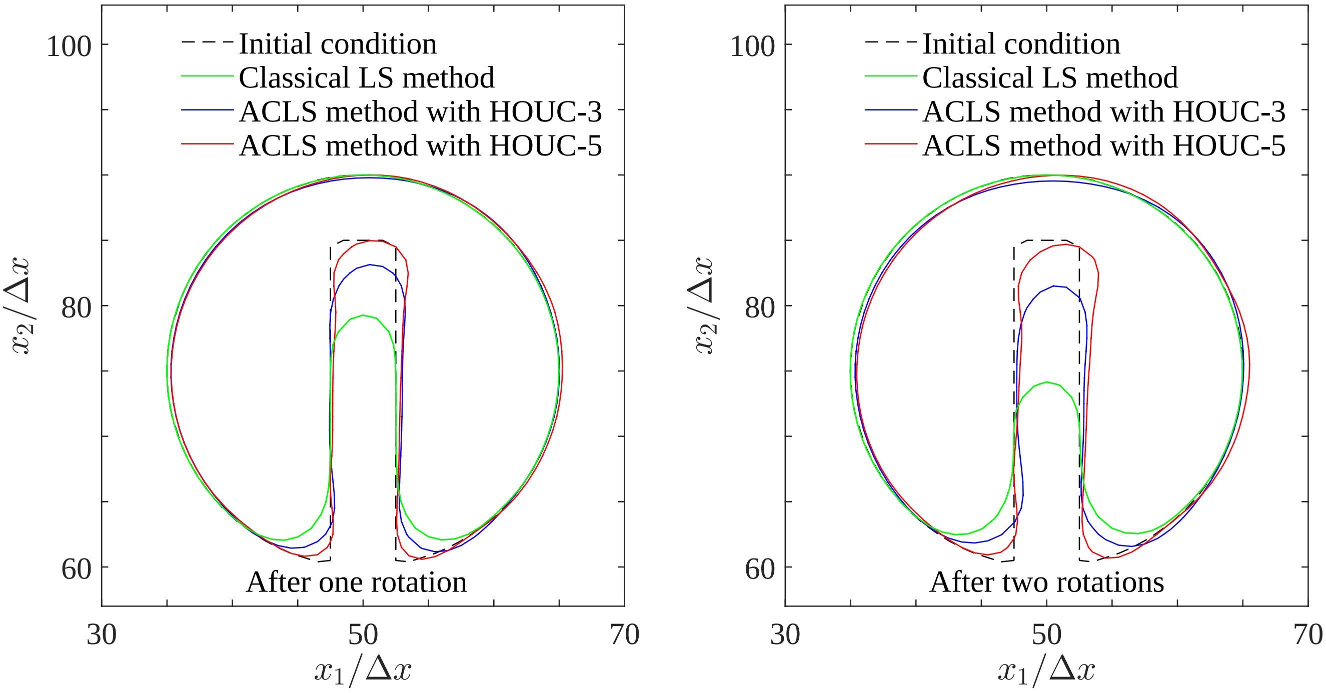

図 1: Zalesak ディスク問題における，1 回転および 2 回転後のディスク形状．Δx は計算格子サイズを表す．

3. 精度検証と考察

ここでは精度検証として，いわゆる Zalesak ディスク問題を採用する．これは図 1 に示すような切り込みの入ったディスク形状をレベルセット関数で表現し，ディスクの剛体回転運動を式 (2) でどの程度捉えられるかを調べるものである．ディスク直径を 30 等分（切り込み幅を 5 等分）する計算格子（格子幅はいずれの方向にも等しく Δx）を利用し，ディスクの 1 回転を 500 時間ステップに分けてシミュレートした．なお，パラメータ ϵ には，Olsson & Kreiss[5] に倣って $0.5\Delta x$ を与え，レベルセット関数の再初期化は行っていない．1 回転および 2 回転後のディスク形状を，古典的なレベルセット法による結果[9]（ただし 1256 時間ステップをかけて 1 回転する）と併せて図 1 に示す．明らかに ACLS 法の結果は古典的なレベルセット法と比較して元のディスク形状に近く，その差は時間とともに広がることが読み取れる．また，3 次精度スキーム HOUC-3 と比較して 5 次精度スキーム HOUC-5 では誤差が大きく低減されており，HOUC-5 ではディスクの切り込み深さに関して，初期のレベルが 2 回転後でもほぼ保たれている．

今後は，界面形状が大きく変形する場合や，移流速度も未知量となるようなより厳しい状況を対象として，ACLS 法の有用性・問題点等を検討したい．

参考文献: 1) Osher & Fedkiw, Springer-Verlag, New York, 2003. 2) Sussman, Fatemi, Smereka & Osher, *Comput. Fluids*, **27**, 663, 1998. 3) Sussman & Puckett, *J. Comput. Phys.*, **162**, 301, 2000. 4) Enright, Fedkiw, Ferziger & Mitchell, *J. Comput. Phys.*, **183**, 83, 2002. 5) Olsson & Kreiss, *J. Comput. Phys.*, **210**, 225, 2005. 6) Desjardins, Moureau & Pitsch, *J. Comput. Phys.*, **227**, 8395, 2008. 7) Nourgaliev & Theofanous, *J. Comput. Phys.*, **224**, 836, 2007. 8) Desjardins, Blanquart, Balarac, & Pitsch, *J. Comput. Phys.*, **227**, 7125, 2008. 9) 横嶋, 土木学会 応用力学論文集, **9**, 755, 2006.