間欠性土石流サージにおける流動モデルの違いがサージ形成に与える影響に関する検討

名城大学理工学部　正会員　新井宗之

1. はじめに

山地河道における間欠的な土石流や土砂流サージの流下現象がある．中国の粘性土石流と呼ばれる土石流サージの流下現象は，多数の間欠的なサージが流下する代表的な流れである．近年の著しい計測技術や観測システムの発展によりこのような間欠的なサージ流下現象が多数観測されるようないなった．欧州のオーストリア，スイス，イタリア等の研究者によって，ヨーロッパアルプスで詳細な観測が行われている．このような山地河道における間欠的なサージ流下現象は流れの不安定性に基づく転波列の一種であると考えられる [1)].

一方，土石流の流動機構においては，流れに含有する粒子相互の衝突の効果が卓越するダイラタント流体モデル，接触する粒子による降伏応力が流れに大きく影響するとするビンガム流体もでる，また含有する粒子が水深に比して小さい場合における粒子衝突・混合モデルなどの流体モデルがある．これらの流動機構の違いがサージ形成においてどのように影響するのかは，まだ十分に明らかにされていない．

本研究では，流動モデルの特性を表す運動量補正係数 β と摩擦損失係数 f' を含む浅水流における水面波動方程式を示し，β や f' がどのような波動方程式のどのような項に関係し，その結果サージ形成にどのように影響するのかを明らかにすることを目的としている．

2. 基礎方程式

座標系を**図-1** のように，流下方向を x，その垂直方向 (水深方向) を y とし，流体を一様流体とし非圧縮 ($\mathrm{div}\vec{v} = 0$) で非回転 ($\mathrm{rot}\vec{v} = 0$) の条件から，速度ポテンシャル ϕ を導入すると，ラプラス方程式の関係があり次式のように表される．

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0. \tag{1}$$

ここに，微分表記を添え字で表し $\partial^2\phi/\partial x^2 = \phi_{xx}$ 等とする（以下同じ）．

また，水底 ($y = -h_0$) での境界条件は，水深方向 (y 方向) の速度成分を v とすると，

$$v = \phi_x = 0, \quad (y = -h_0). \tag{2}$$

水面の変形と水面の水粒子の運動が一致する条件は，水深 h_0 からの水面の変動成分を $\eta(x,t)$ とすると，次式の関係がある．

$$\phi_y - \eta_t - \phi_x\eta_x = 0, \quad (y = 0). \tag{3}$$

Keyword : 間欠性土石流サージ，転波列，波動方程式，流体モデル
〒 468-8502 愛知県名古屋市天白区塩釜口 1-501 Tel: 052-838-2364

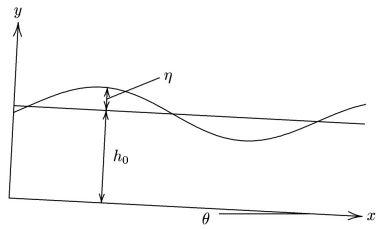

図-1 座標系

浅水域の湛水状態での水面変動の波動方程式の導出において，通常水面変動条件にベルヌーイの式が用いられる．しかし著者らは，水面変動条件に浅水流の運動方程式を考慮した水面変動の波動方程式を得ている [2)]．しかしながら，これまでの方程式において流体モデルの違いは考慮しておらず，平均水深 h_0 と平均流速 u_0 は測定結果を用い既知の値としている．ここでは，流体モデルの特性を表す運動量補正係数 β と摩擦損失係数 f' を加えた水面変動条件として次式を用いるものとする．

$$\begin{aligned}\phi_t + \frac{1}{2}(2\beta - 1)(\phi_x)^2 - g\sin\theta\, x + g\cos\theta\, h \\ + \frac{f'}{2}\frac{u_0}{h_0}\phi + (\beta - 1)\frac{u_0}{h_0}\int \phi_x\eta_x \mathrm{d}x = 0\end{aligned} \tag{4}$$

ここに，β : 運動量補正係数，g : 重力加速度，θ : 水路勾配，$h = h_0 + \eta$: 水深，f' : 摩擦損失係数，u_0 : 平均流速，h_0 : 平均水深．式 (4) の左辺第１項はポテンシャルの時間変動項，第２項は運動エネルギー，第３項は位置エネルギー，第４項は比エネルギー，第５項は底面摩擦による損失項，第６項は水深方向の流速分布が一様でない場合の水面変動による付加エネルギー項である．

3. 無次元基礎方程式と摂動展開

代表長さを平均水深 h_0，代表速度を Gerdner-Morikawa(G-M) 変換

$$\xi = \epsilon^{\frac{1}{2}}\left(x - v_{p0}t\right), \quad \tau = \epsilon^{\frac{3}{2}}t \tag{5}$$

における位相速度パラメータ v_{p0} とする．ϵ は摂動展開における微小パラメータである．これより無次元量を次のように定義し，無次元量にプライムを付す．

$$\begin{aligned}\phi' = \phi/(h_0 v_{p0}), \quad x' = x/h_0, \quad y' = y/h_0, \\ t' = \left(v_{p0}/h_0\right)t, \quad \eta' = \eta/h_0.\end{aligned} \tag{6}$$

これより，ξ，τ の無次元量 ξ'，τ' は次式のようである．

$$\xi' = \epsilon^{\frac{1}{2}}(x' - t'), \quad \tau' = \epsilon^{\frac{3}{2}}t' \tag{7}$$

これらより式 (1)~ 式 (4) の基礎方程式の無次元表示は次式のようである．

$$\phi'_{x'x'} + \phi'_{y'y'} = 0, \tag{8}$$

$$\phi'_{y'} = 0,\ \ (y' = -1), \tag{9}$$

$$-\phi'_{y'} + \eta'_{t'} + \phi'_{x'}\eta'_{x'} = 0,\ \ (y' = 0), \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\phi'_{t'} &+ \frac{1}{2}(2\beta - 1)(\phi'_{x'})^2 - {c_0}'^2 \tan\theta\, x' \\ &+ {c_0}'^2(1 + \eta') + \frac{f'}{2}{u_0}'{c_0}'\phi' \\ &+ (\beta - 1){u_0}'{c_0}' \int \phi'_{x'}\eta'_{x'}\mathrm{d}x' = 0.\end{aligned} \tag{11}$$

ここに，${u_0}' = u_0/c_0$，${c_0}' = c_0/v_{p0}$，$c_0 = \sqrt{gh_0\cos\theta}$.

平均水深 h_0 からの変動量 η および速度ポテンシャル ϕ の摂動展開は，無次元量を

$$\begin{aligned}&\eta' = \eta/h_0,\ \ \eta'^{(1)} = \eta^{(1)}/h_0,\ \ \eta'^{(2)} = \eta^{(2)}/h_0, \cdots, \\ &\phi' = \phi/(h_0 v_{p0}),\ \ \phi'^{(1)} = \phi^{(1)}/(h_0 v_{p0}),\ \ \cdots\end{aligned} \tag{12}$$

と定義すると，η'，ϕ' の無次元摂動展開として

$$\eta' = \epsilon\eta'^{(1)}(\xi', \tau') + \epsilon^2\eta'^{(2)}(\xi', \tau') + \cdots, \tag{13}$$

$$\phi' = \epsilon^{\frac{1}{2}}\phi'^{(1)}(\xi', y', \tau') + \epsilon^{\frac{3}{2}}\phi'^{(2)}(\xi', y', \tau') + \cdots \tag{14}$$

と表される．また，$y' = 0$ の近傍 η' における ϕ' の Boussinesq による Taylor 展開を用いる．これらを無次元基礎方程式に代入すると摂動展開の無次元基礎方程式を得る．ここでは水面変動条件式 (11) についてのみ記すと次式のようである．

式 (11) の水面変動条件は，

$$\begin{aligned}&\phi'_{t'} + \frac{1}{2}(2\beta - 1)(\phi'_{x'})^2 - {c_0}'^2\tan\theta\, x' + {c_0}'^2 + {c_0}'^2\eta' \\ &\quad + \frac{f'}{2}{u_0}'{c_0}'\phi'' + (\beta - 1){u_0}'{c_0}' \int \phi'_{x'}\eta'_{x'}\mathrm{d}x \\ &= -\epsilon\phi'^{(1)}_{\xi'} - \epsilon^2\phi'^{(2)}_{\xi'} - \epsilon^3\phi'^{(3)}_{\xi'} - \cdots \\ &\quad + \epsilon^2\phi'^{(1)}_{\tau'} + \epsilon^3\phi'^{(2)}_{\tau'} + \epsilon^4\phi'^{(3)}_{\tau'} + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{2}(2\beta - 1)\left\{\epsilon^2\left(\phi'^{(1)}_{\xi'}\right)^2 + 2\epsilon^3\phi'^{(1)}_{\xi'}\phi'^{(2)}_{\xi'}\right. \\ &\qquad \left. + \epsilon^4\left(\phi'^{(2)}_{\xi'}\right)^2 + \cdots\right\} \\ &\quad - {c_0}'^2\tan\theta\, x' + {c_0}'^2 \\ &\quad + {c_0}'^2\left(\epsilon\eta'^{(1)} + \epsilon^2\eta'^{(2)} + \epsilon^3\eta'^{(3)} + \cdots\right) \\ &\quad + \frac{f'}{2}{u_0}'{c_0}'\Big\{ \\ &\qquad \epsilon^{\frac{1}{2}}\phi'^{(1)} + \left(\epsilon^{\frac{3}{2}}\eta'^{(1)} + \epsilon^{\frac{5}{2}}\eta'^{(2)} + \cdots\right)\phi'^{(1)}_{y'} + \cdots \\ &\qquad + \epsilon^{\frac{3}{2}}\phi'^{(2)} + \left(\epsilon^{\frac{5}{2}}\eta'^{(1)} + \epsilon^{\frac{7}{2}}\eta'^{(2)} + \cdots\right)\phi'^{(2)}_{y'} + \cdots \\ &\qquad + \epsilon^{\frac{5}{2}}\phi'^{(3)} + \left(\epsilon^{\frac{7}{2}}\eta'^{(1)} + \epsilon^{\frac{9}{2}}\eta'^{(2)} + \cdots\right)\phi'^{(3)}_{y'} + \cdots\Big\} \\ &\quad + (\beta - 1){u_0}'{c_0}'\Big\{\epsilon^2\int \phi'^{(1)}_{\xi'}\eta'^{(1)}_{\xi'}d\xi' \\ &\qquad + \epsilon^3\int \phi'^{(1)}_{\xi'}\eta'^{(2)}_{\xi'}d\xi' + \epsilon^3\int \phi'^{(2)}_{\xi'}\eta'^{(1)}_{\xi'}d\xi' \\ &\qquad + \epsilon^4\int \phi'^{(2)}_{\xi'}\eta'^{(2)}_{\xi'}d\xi' + \cdots\Big\} = 0\end{aligned} \tag{15}$$

である．

4. 波動方程式および考察

逓減摂動法による近似解法は，摂動展開方程式の各方程式における ϵ の次数別の項の和を 0 とする連立方程式を解くことである．したがって，無次元基礎方程式の摂動展開方程式から，ここでは水面変動に関する方程式を得るため ϵ の次数別の関係式を求め，$\epsilon^{\frac{5}{2}}$ までの関係式から $\eta'^{(1)}$ に関する方程式を得ることである．複雑な過程を要するが，$\eta'^{(1)}$ の方程式の導出結果だけを記せば下記のようである．ただし，$\eta'^{(1)}$ を η' と記している．

$$\eta'_{\tau'} + a_1\eta'\eta'_{\xi'} + a_2\eta'_{\xi'\xi'} + a_3\eta'_{\xi'\xi'\xi'} = 0 \tag{16}$$

ここに，

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{1}{2}\left\{(2\beta + 1){c_0}'^2 + (\beta - 1){u_0}'{c_0}'\right\}, \\ a_2 &= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{{c_0}'^2} - \frac{1}{2}\right)f'{u_0}'{c_0}', \\ a_3 &= \frac{1}{2}\left(\frac{2 + {c_0}'^4}{2{c_0}'^2} - \frac{3}{2}\right).\end{aligned} \tag{17}$$

得られた式 (16)，(17) は KdV-Burgers 型の方程式である．式 (16) の係数 a_1，a_2，a_3 の正負の符号は方程式の性質に大きな影響を与える．運動量補正係数 β は $\beta \geq 1$ であり，摩擦損失係数 f' は $f' > 0$ である．また，長波速 $c_0 = \sqrt{gh_0\cos\theta}$ や平均流速の無次元量 ${u_0}' = u_0/c_0$ は正の値であるから，a_1，a_2，a_3 の正負は ${c_0}'$ の値の大きさによって分けられる．${c_0}'^2$ と a_1, a_2 ,a_3 の符号との関係を**表-1** に示す.

表-1 a_1, a_2 ,a_3 の符号

${c_0}'^2$	a_1	a_2	a_3
$0 < {c_0}'^2 < 1$	+	−	+
${c_0}'^2 = 1$	+	−	0
$1 < {c_0}'^2 < 2$	+	−	−
${c_0}'^2 = 2$	+	0	0
$2 < {c_0}'^2$	+	+	+

ここで対象としている流れでは $0 < {c_0}'^2 < 1$ および ${c_0}'^2 = 1$ に相当している．この結果によると流れの流速分布形の影響を示す運動量補正係数 β は第 2 項の非線形項に関係し，流れの抵抗を表す摩擦損失係数 f' は第 3 項の散逸項に関係している．これはサージ波形の形成過程に β や f' が関係していることを意味している．また，第 4 項の分散項の係数には β や f' がここでの摂動展開の近似では含まれていないため，それらの影響が少ないことを示している．

参考文献

1) Arai M., Huebl J. and Kaitna R.: Occurrence conditions of roll waves for three grain-fluid models and comparison with results from experiments and field observation. *Geophysical Journal International* , Vol.195, Issue 3, pp.1464-1480 (doi:10.1093/gji/ggt352), 2013.

2) Arai, M.: Wave equation and Some solutions on intermittent debris flow, *International Journal of Erosion Control Engineering* , Vol.10, No.1, pp.39-46, 2017.