# CFRP 板に対する分散曲線導出のための数値解析と超音波非破壊評価への応用に関する研究

○群馬大学大学院 学生会員 金子龍之介
群馬大学大学院理工学府 正会員 斎藤隆泰

## 1. はじめに

近年, 炭素繊維強化プラスチック (CFRP:Carbon Fiber Reinforced Plastic) 等の異方性材料が土木分野でも応用されるようになっている. その CFRP はプリプレグと呼ばれる薄い炭素繊維シートを任意に積層することで成形される. しかしながら, その積層パターンは様々であり, かつ, それら積層パターンに応じて異方性の影響が異なることが知られている. 一般に CFRP は薄板構造となるため, CFRP 中を伝搬する波動は複雑となり, 分散性を示す. よって, CFRP を正しく利用するためには, このような異方性や分散性といった性質を正しく理解しておくことが必要となる. そこで, 本研究では, CFRP 中を伝搬する弾性波の分散曲線を導出し, その応用に関する基礎的な検討を行うことを目的とする.

## 2. 異方性板の分散曲線導出のための基礎式

ここでは, 図 1 のような, CFRP 板の巨視的な弾性定数 $C_{ijkl}$ が既に求められていることを前提とする. また, 本定式化では $x_1 - x_2$ 平面で無限領域を持ち, $x_3 = 0, h$ の平面で自由境界を持つことを仮定する. 添字は特に断りのない限り, 総和規約に従うものとする.

異方性材料中を伝わる弾性波は, 方向依存性を持つ [1] ことが知られている. そこで, 図 1 のように波動伝搬方向 $\theta$ に対応する座標系 $(x_1, x_2, x_3)$ を考える. この場合, 座標系 $(x_1, x_2, x_3)$ での弾性定数 $C_{ijkl}$ は事前に求めておくものとする. ここで, 導出される分散曲線（位相速度曲線や群速度曲線）は, 波動の伝搬方向である $x_1$ 方向に対する分散曲線であることに留意する. さて, 異方性弾性体である CFRP 板中の変位 $u_i(\boldsymbol{x}, t)$ は次の式を満足する.

$$\rho \frac{\partial^2 u_i(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t^2} = C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l(\boldsymbol{x}, t)}{\partial x_j \partial x_k} \tag{1}$$

ただし, $\rho$ は密度, $t$ は時間を表す. 今, 図 1 のような, 厚さ $h$ の CFRP 板中を伝搬する弾性波を, 振幅 $U_l$, 位相速度 $c_p$, 波数 $k$ を用いて

$$u_l(\boldsymbol{x}, t) = U_l e^{ik(x_1 + \alpha x_3 - c_p t)} \tag{2}$$

のように表すと仮定する. ただし, $\alpha$ は $x_1$ 方向の波数と $x_3$ 方向の波数との比を表す未知係数である. 式 (2) を式 (1) に代入し, $C_{ijkl}$ をフォークト標記された弾性定数 $C_{MN}(M, N = 1, \ldots, 6)$ で表現し, 整理すれば, 次の式を得る.

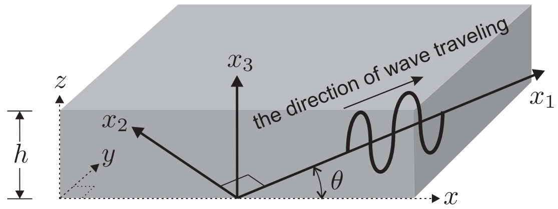


図 1 伝搬方向 $\theta$ に対応する座標系 $(x_1, x_2, x_3)$.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

ただし, 係数行列 $\boldsymbol{A}$ はそれぞれ,

$$\begin{cases} A_{11} = C_{11} + 2C_{15}\alpha + C_{55}\alpha^2 - \rho c_p^2 \\ A_{12} = C_{16} + (C_{14} + C_{56})\alpha + C_{45}\alpha^2 \\ A_{13} = C_{15} + (C_{13} + C_{55})\alpha + C_{35}\alpha^2 \\ A_{22} = C_{66} + 2C_{46}\alpha + C_{44}\alpha^2 - \rho c_p^2 \\ A_{23} = C_{56} + (C_{36} + C_{45})\alpha + C_{34}\alpha^2 \\ A_{33} = C_{55} + 2C_{35}\alpha + C_{33}\alpha^2 - \rho c_p^2 \end{cases} \tag{4}$$

で表される. 式 (3) が非自明解を持つ場合, 式 (3) の係数行列 $\boldsymbol{A}$ の行列式はゼロ ($|\boldsymbol{A}| = 0$) でなければならない. そのため, 係数 $\alpha$ と振幅 $U_l$ に対して, 式 (3) における行列式がゼロである条件を考えれば, 適当な位相速度 $c_p$ に対する $\alpha$ が求まる. この時, 式 (4) より, 係数行列の行列式は, $\alpha$ に関する 6 次方程式となる. 6 次方程式の解の 3 ペア（共役解）のうち, 2 つのペアが Lamb 波伝搬を表しており, 残りの 1 ペアが SH 波伝搬を示すこととなる. 全ての $\alpha$ が求まれば, それらをそれぞれ式 (4) に代入すれば, 式 (3) における係数行列 $\boldsymbol{A}$ は求まる. 一方, 式 (2) の振幅 $U_l$ は適当な振幅であるので任意性がある. そのため, 例えば $U_1 = 1.0$ 等と仮定すれば, 式 (3) を全ての $U_l$ について解くことが可能となる. すなわち, 1 つの $\alpha$ に対して 3 つの $U_l$ が求まる. よって 6 つの $\alpha$ を $\alpha_m (m = 1, \ldots, 6)$ とし, その $\alpha_m$ に対応して得られた振幅を $U_{lm} (l = 1, 2, 3, m = 1, \ldots, 6)$ と表記することとする. これより, CFRP 板内部の波動場は, 全ての Lamb 波と SH 板波の和であるから, 波動場 $u_l$ は,

$$u_l(\boldsymbol{x}, t) = \left[ \sum_{m=1}^{6} B_m U_{lm} \exp(ik\alpha_m x_3) \right] (ik) \exp(i(kx_1 - \omega t)) \tag{5}$$

**Key Words:** CFRP 板, 位相速度曲線, 群速度曲線, 非破壊評価
〒 376-8515 群馬県桐生市天神町 1-5-1・TEL/FAX:0277-30-1610

と書くことができる. ただし, 係数 $B_m$ は CFRP 板の境界条件を満足するように決定する必要がある. 実際, CFRP 板の表面や底面は, 応力フリーであるため, 次の条件件を満足する必要がある.

$$\sigma_{3l} = 0, \quad l = 1, 2, 3 \ \text{ at } \ x_3 = 0 \ \text{ and } \ x_3 = h \tag{6}$$

ここで, 変位と応力は, 次の構成則

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{x}, t) = C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l(\boldsymbol{x}, t)}{\partial x_j \partial x_k} \tag{7}$$

によって関係づけられる. よって, 式 (7) の構成則から, 式 (5) に対応する応力を求めると,

$$\sigma_I(\boldsymbol{x}, t) = \left[ \sum_{m=1}^{6} M_{Im} B_m \exp(ik\alpha_m x_3) \right] (ik) \exp(i(kx_1 - \omega t)) \tag{8}$$

と求めることができる. ここで, $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}$ はそれぞれ $\sigma_I(I = 1, 2 \cdots, 6)$ とした. 境界条件 (6) を式 (8) に用いて, 整理すると, 最終的に次のような $6 \times 6$ の係数行列 $\boldsymbol{M}$ を用いた次の代数方程式を得る.

$$\boldsymbol{MB} = \boldsymbol{0} \tag{9}$$

ここで, $\boldsymbol{B} = [B_1, B_2, \cdots B_6]^T$ である. さて, 式 (9) の特性方程式が, 非自明解を持つためには, 先ほどの式 (3) と同様にして, 係数行列 $\boldsymbol{M}$ の行列式がゼロ ($|\boldsymbol{M}| = 0$) となる条件を考えればよい. しかしながら, 式 (9) の係数行列 $\boldsymbol{M}$ には波数 $k$ (または, 振動数 $f$) と板厚 $h$ が残されている. そこで, 板厚 $h$ と波数 $k$ の積を 1 つのパラメータとすれば, 任意の位相速度 $c_p$ に対して, 係数行列 $\boldsymbol{M}$ の行列式がゼロとなるような板厚と波数の積 $kh$ を数値計算で順番に求めることができる. ここで求めた位相速度 $c_p$ に対して板厚と波数の積 $kh$ をプロットすれば位相速度に対する分散曲線が描けることとなる.

## 3. 位相速度曲線と群速度曲線

一般的に, 異方性材料中では位相速度と群速度は一致しない. 異方性材料の場合, 弾性波の波面の拡がりは群速度として表されるため, 位相速度曲線から群速度曲線を求めておくと便利である. 群速度曲線は, 位相速度曲線から求めることができる. その場合の群速度 $c_g$ と位相速度 $c_p$ の関係は次の式で表される [2).

$$c_g = \frac{c_p^2}{c_p - f \frac{dc_p}{df}} \tag{10}$$

ただし, $f$ は振動数である.

## 4. 数値解析例

以下, 数値解析例を示す. CFRP 板の弾性定数は, 疑似等方性積層 CFRP 板（横等方性）を想定し, $C_{11} = C_{22} = 52.3$, $C_{12} = 21.7$, $C_{13} = C_{23} = 4.16$, $C_{33} = 13.8$, $C_{44} = C_{55} = 5.43$, $C_{66} = 17.6$ (単位はいずれも GPa) で与えた. 図 2(a), (b) はそれぞれ $\theta = 0°$ における SH 板波, Lamb 波の位相速度曲線を示している. 図 2(a) より, カットオフ周波数は, SH 板波の場合は概ね $fd = 1, 2, 3$MHz 等の整数の周波数で現れることがわかる. 一方, Lamb モードの分散曲線を示す図 2(b) を見ると, $fd \leq 1$ の低周波数帯で, ほぼ一定の位相速度を示す事がわかる. すなわち, 式 (10) より, 群速度は位相速度と一致するため, 例え低周波数帯でガイド波が励起されたとしても, そのガイド波の群速度は実体波程度の速度で伝搬することがわかる. また, 式 (10) の関係を用いれば, 図 2 のプロット結果を用いて, 群速度曲線を導出することも可能である.

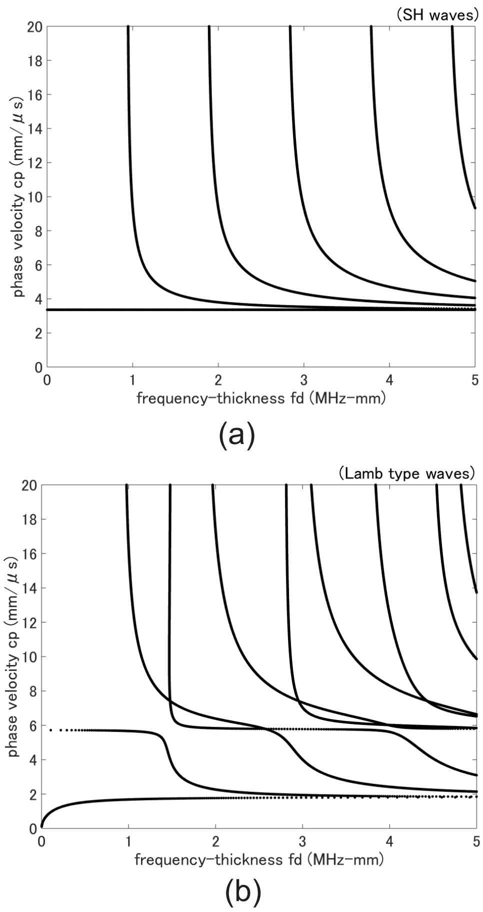


**図 2** 疑似等方積層 CFRP 板における 0 ˚方向の位相速度分散曲線 (a)SH 波の場合 (b)Lamb 波の場合.

## 5. まとめと今後の課題

本研究では, CFRP 板に対する分散曲線を導出することを行った. 数値解析例として, 疑似等方積層 CFRP 板に対する位相速度曲線を描いた. 今後は, 求めた分散曲線を用いた CFRP 板に対する超音波伝搬シミュレーションへと応用させる予定である.

### 参考文献

1) B. A. Auld: Acoustic Fields and Waves in Solids,vol.1,2, R.E.Krieger, 1990
2) J. L. Rose: Ultrasonic guided waves in solid media, Cambridge University, 2014