演算子積分時間領域境界要素法を用いた オーステナイト系鋼材中のき裂群に対する SH 波の大規模多重散乱解析

○群馬大学大学院理工学府　学生会員　伊藤司
群馬大学大学院理工学府　正会員　斎藤隆泰

1. はじめに

オーステナイト系鋼材は原子力発電所の構造材や一次系配管として，耐食性を有する部位に広く利用されている．しかしながら，オーステナイト系鋼材は音響異方性を有するために複雑な力学挙動を示すほか，高温，高圧の腐食環境下に置かれると，応力腐食割れ (き裂) を生じることが問題視されている．そのため，現場での適用が比較的容易な超音波非破壊評価法を用いた，オーステナイト系鋼材の探傷を視野に入れると，音響異方性材料中の波動伝搬解析手法の開発が必要である．一方，近年の計算機ハードウェアの発達は目覚ましく，比較的容易に並列化計算を実行できる環境が整ってきた．特に OpenMP や MPI (Message Passing Interface) は，科学技術計算に特化したプログラミング言語である Fortran を用いて十分に性能を発揮し，扱える状況にある．そこで，本研究では MPI 並列化を適用した演算子積分時間領域境界要素法 (CQBEM : Convolution Quadrature Boundary Element Method) を用いて，オーステナイト系鋼材中の，き裂群に対する SH 波の大規模多重散乱解析を実行する．以下では，解くべき問題について簡単に説明した後，き裂に対する演算子積分時間領域境界要素法について述べる．最後に， 数値解析例を示すことで本手法の妥当性，有効性を検討する．

2. 解くべき問題

解くべき問題は図 1 に示すような，無限異方性弾性体 V 中のき裂群に対する SH 波の散乱問題である．図 1 のように，角度 θ で配置された複数のき裂 $2a$ に対して鉛直上向きに入射波を送信する．

3. き裂に対する演算子積分時間領域境界要素法

文献 [1] を参考に，均質で異方性を有する線形弾性体 V 中のき裂群に対する CQBEM の定式化を述べる．面外変位 $u_3(\boldsymbol{x},t)$ に関して，以下の境界積分方程式が成り立つ．

$$u_3(\boldsymbol{x},t) = u_3^{\rm in}(\boldsymbol{x},t) + \int_S T_{33}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) * \phi_3(\boldsymbol{y},t)dS_y \quad (1)$$

ただし，$u_3^{\rm in}(\boldsymbol{x},t)$ は，入射波の変位を表し，$*$ は時間に関する畳込み積分を表す．また， $T_{33}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$ は， 2 次元異方性純面外弾性波動問題における二重層核であり，$\phi_3(\boldsymbol{y},t)$ はき裂開口変位を表す．式 (1) を $\boldsymbol{x}$ に関して微分し，領域内部の点をき裂面に極限移行することにより，動的基本解の 2 回微分を含む超特異核 W_{33} からなる表面力境界積分方程式を次のように導く．

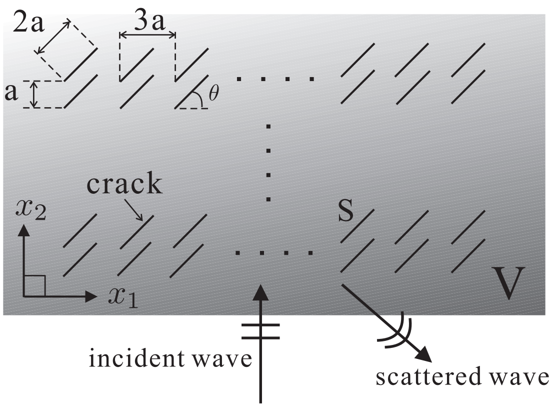

図 1 SH 波動散乱解析モデル

$$t_3^{\rm in}(\boldsymbol{x},t) = -\int_S W_{33}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) * \phi_3(\boldsymbol{y},t)dS_y \quad (2)$$

ここで，$t_3^{\rm in}(\boldsymbol{x},t)$ は入射波 $u_3^{\rm in}(\boldsymbol{x},t)$ に対応する表面力成分を表す．式 (2) を時間と空間に関して離散化することで，き裂開口変位 $\phi_3(\boldsymbol{y},t)$ を求めることができる．き裂開口変位 $\phi_3(\boldsymbol{y},t)$ が求まれば式 (1) の解の積分表現を用いて領域内における変位を求めることができる．しかしながら，時間に関して式 (2) を直接離散化し，き裂開口変位 $\phi_3(\boldsymbol{y},t)$ を求めることは，数値解が不安定になる可能性をもつ．そこで本研究では，式 (2) の時間領域境界積分方程式に対して，Lubich により開発された演算子積分法 (CQM : Convolution Quadrature Method)[2] を適用した， CQBEM の実行を試みる． CQBEM を用いることで，時間増分が小さい場合でも安定に計算することが可能となる．空間に関する離散化に M 個の一定要素を用いた選点法，時間に関する離散化に CQM を時間ステップ数 n として適用すれば，離散化した表面力境界積分方程式は以下のように表すことができる．

$$t_3^{\rm in}(\boldsymbol{x},n\Delta t) = \sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{k=1}^{n}[A_{33}^{n-k}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}^\alpha) + B_{33}^{n-k}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}^\alpha)]\phi_3(\boldsymbol{y}^\alpha,n\Delta t) \quad (3)$$

ただし，右上添字 α は，点 $\boldsymbol{y}$ に関しての指標を表してお

Key Words: 演算子積分時間領域境界要素法, 多重散乱解析, 並列化, 音響異方性
〒 376-8515　群馬県桐生市天神町 1-5-1

り，影響関数 $A_{33}^{n-k}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}^{\alpha})$，$B_{33}^{n-k}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}^{\alpha})$ は以下のように表される．

$$A_{33}^{m}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \rho C_{3c3l} n_c(\boldsymbol{x}) n_l(\boldsymbol{y}) \frac{R^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1}\left[-\int_S (s_l)^2 \hat{U}_{33}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},s_l)dS_y\right] e^{-\frac{2\pi iml}{L}} \tag{4}$$

$$B_{33}^{m}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = C_{3c3l}C_{3j3a} n_c(\boldsymbol{x}) e_{3lj} \frac{R^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1}\left[\int_S \frac{\partial}{\partial y_a} \hat{U}_{33}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},s_l)dS_y\right] e^{-\frac{2\pi iml}{L}} \tag{5}$$

ただし，本解析は 2 次元面外波動場を解析対象としているため，右下添字は 1，2 の値をとる．また，i は虚数単位，n_l は法線ベクトル成分，C_{ijkl} は弾性定数，ρ は異方性材料の密度，$\hat{U}_{33}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},s_l)$ は 2 次元異方性面外波動問題に対するラプラス変換域における基本解である．一方，s_l はラプラスパラメータに対応する CQM のパラメータであり，R，L は目標とする精度 ϵ によって決定されるパラメータで，

$$R = \sqrt{\epsilon}^{\frac{1}{L}} \tag{6}$$

を満足するように決定される．また，e_{ijk} は交代記号を表す．本研究で扱うような，き裂群に対して CQBEM を直接適用すると，膨大な計算コストがかかることが予想される．そこで式 (4)，式 (5) の影響関数の計算に関して MPI-OpenMP 並列化を施すことで， 計算コストの縮小を図る．

4. 数値解析例

以下，数値解析例を示す．図 1 のようなオーステナイト系鋼材中の 8×8 個の $\theta = 0°$ の水平き裂と $\theta = -45°$ の斜めき裂による SH 波の大規模多重散乱解析を行った．ただし，水平き裂は $23.0a \times 7.0a$ の長方形領域に，斜めき裂は $23.0a \times 8.5a$ の長方形領域に規則正しく配置した．各き裂は 40 個の境界要素に分割しており， 全境界要素数は 2560，総時間ステップ数を水平き裂は $N = 512$，斜めき裂は $N = 256$ としたため，全未知数はそれぞれ $2560 \times 512 = 1310,720$，$2560 \times 256 = 655,360$ の大規模問題となる．入射波 $u_3^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x},t)$ は x_2 軸を正の方向に伝搬する平面波とし，次のように与えた．

$$u_3^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x},t) = \frac{u_0}{2}(1-\cos 2\pi\alpha) \tag{7}$$

$$\alpha = \begin{cases} \dfrac{c_T}{\lambda}\left(t - \dfrac{x+a}{c_T}\right) & \text{for} \quad (0 \le \alpha \le 1) \\ 0 & \text{for} \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

ここで，u_0 は入射波の変位振幅，λ，c_T は入射波の波長および波速を表す． また，オーステナイト系鋼材の弾性定数は，$C_{44} = 1.0$，$C_{55} = 0.64$ であり，それぞれ C_{44} で無次元化している．次に，オーステナイト系鋼材を伝搬する波動の群速度曲線を図 2 に示す．本研究で扱う波動は qS2 波（面外波，青線で表記）であること，群速度ベクトルの値はそれぞれの $c_0 = \sqrt{C_{44}/\rho}$ で無次元化されていることに注意されたい． 図 2 より，オーステナイト系鋼材中の qS2 波は鉛直方向に早く伝搬することがわかる．図 3 は，$c_0t/a = 5$，$c_0t/a = 10.5$ における水平き裂に対する波動散乱解析と $c_0t/a = 6$，$c_0t/a = 12$ における斜めき裂に対する波動散乱解析の結果である．解析結果の散乱波伝搬挙動を見てわかるように， 散乱波は鉛直方向に早く伝搬しており，散乱波が異方性の影響を強く受けていることがわかる．また，図 3 より， MPI 並列化を適用することで，き裂群に対する大規模多重散乱解析が正しく行われていることがわかる．

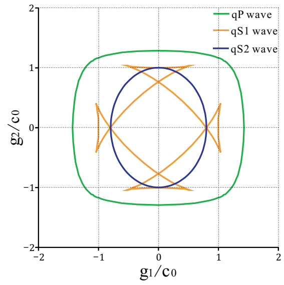

図 2 オーステナイト系鋼材中を伝搬する波動の群速度曲線

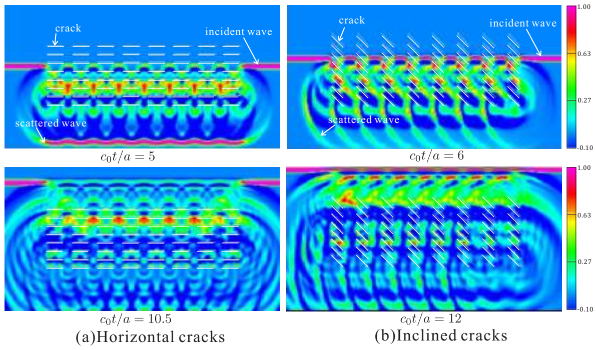

図 3 き裂群に対する SH 波動散乱解析 (a)Horizonal cracks (b)Inclined cracks

5. おわりに

MPI 並列化を適用した演算子積分時間領域境界要素法を用いて，オーステナイト系鋼材中のき裂群に対する大規模多重散乱解析を行った．今後は，並列化計算による計算効率について，より詳細に検討する予定である．

6. 謝辞

本研究は平成 29 年度学際大規模情報基盤共同利用・共同研究拠点 (課題番号 : jh170045-NAJ) の支援の下，実施された．

参考文献

1) 斎藤隆泰・金井翔平・丸山泰蔵・古川陽・廣瀬壮一: 演算子積分時間領域境界要素法を用いた接触境界条件を考慮した 3 次元クラックによる弾性波動散乱解析, 計算数理工学論文集, Vol.14, pp.31-36, 2014.
2) C. Lubich: Convolution quadrature and discretized operational calculus I, *Numer. Math.*, 52, pp.129-145, 1988.