三次元動弾性問題における B-spline Ritz 法の厚さ方向のモード分解能

大分工業高等専門学校　正会員　○名木野晴暢　熊本大学　学生会員　橘才造
長岡技術科学大学大学院　学生会員　山本寧音　明石工業高等専門学校　正会員　石丸和宏

1. まえがき

2005 年に Hughes et al.[1] によって isogeometric (IG) 解析の概念が提案されて以降，非一様有理 B-splines (Non-uniform Rational B-splines: NURBS) を変位関数に採用した離散化手法の研究が活発に行われている．しかし，B-spline 基底関数を離散化手法の変位関数に採用する試みは 1980 年頃から始まり [2), 3)]，Nagino et al.[4] は B-spline 基底関数の三重積を試行関数に用いた Ritz 法 (B-spline Ritz 法) を用いて長方形板の三次元自由振動問題を解析し，その有効性を示している．これらの研究は座標系に従う単純な形状の線形弾性体を対象としたもので，実用上重要になる任意形状の取り扱いについては解決すべき課題の一つであった．

本稿では，物理座標系における B-spline 曲線と自然座標系との IG 写像の視点から B-spline Ritz 法の任意形状への応用の可能性を考察した．また，厳密解が得られる矩形板の三次元自由振動問題 [5)] を例題として，B-spline Ritz 法の厚さ方向の固有関数の分解能に関する基礎的な調査も行ったので報告する．

2. B-spline Ritz 法と IG 写像の関係

長さ L (m) を有する直線部材を考える．B-spline Ritz 法では，直線部材の変位を B-spline 基底関数の線形結合として次の様に仮定する．

$$U(\xi) = \sum_{i=1}^{I} A_i \cdot N_{i,p}(\xi) \quad (0 \le \xi \le 1). \tag{1}$$

ここで，$U(\xi)$ は無次元変位，$\xi = x/L$ は無次元座標（パラメータ），$N_{i,p}(\xi)$ は p 次の正規化された B-spline 基底関数，$I\,(= q + p - 1)$ は基底関数の数，q はノットの数であり，A_i は一般化変位（未定係数）である．近似解の精度は，spline 次数 p とノットの数 q に依存する．

Riesenfeld による B-spline 曲線 $\mathbf{C}(\xi) = (x(\xi), y(\xi))$ は，媒介変数ξを用いて次式のように表される．

$$\mathbf{C}(\xi) = \sum_{i=1}^{I} N_{i,p}(\xi) \cdot \mathbf{P}_i \quad (0 \le \xi \le 1). \tag{2}$$

ここで，$\mathbf{P}_i = (x_i, y_i)$ は制御点ベクトルである．曲線の形状は, 制御点ベクトルの数 I とその位置（座標値）によって決まる．式(2) によって得られる曲線は $\mathbf{P}_i$ を直線で連ねた制御多角形 (control polygon) の内側に描かれ，一般的に $\mathbf{P}_i$ を通過しない．$\mathbf{P}_i$ を通過させるためには制御点を重ねるか，パラメータ空間に開一様 (open uniform) ノットを設定する必要がある．

図-1 は，$p = 2, q = 5$ の一様 (uniform) ノット（付加ノット数は4）を設定したときの正規化された B-spline 基底関数である．この基底関数を用いて定義域 ($0 \le x \le 10$: 単位 m) の直線 ($y_i = 0, i = 1, 2, \ldots, 6$) を描くと**図-2** のようになる．これより，制御点の位置を工夫すれば 10 m の直線を正確に表現できている．文献 2) – 4)

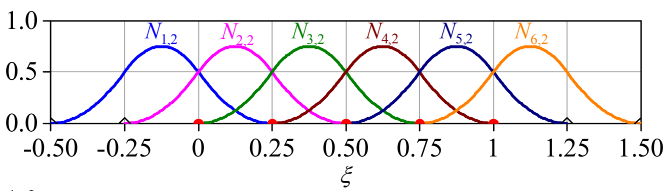

図-1　一様ノットからなる正規化された B-spline 基底関数

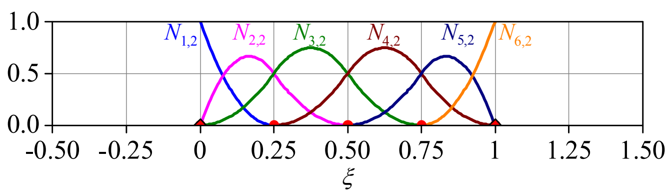

図-3　開一様ノットからなる正規化された B-spline 基底関数

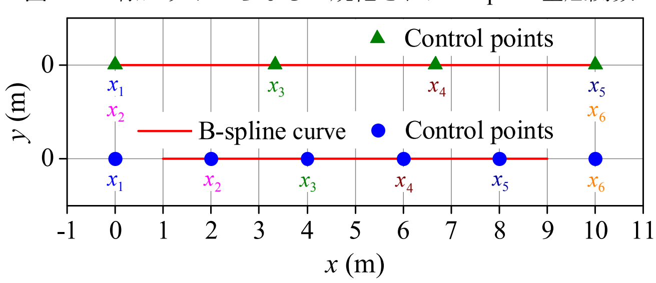

図-2　**図-1** の基底関数による長さ 10 m の直線部材

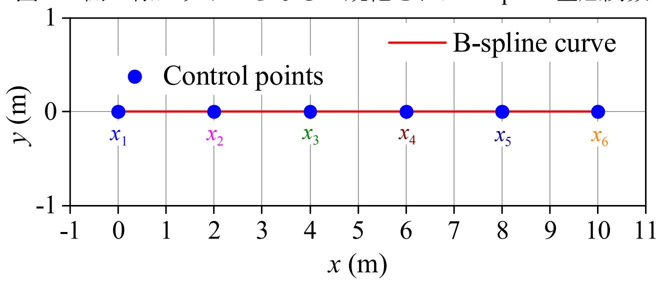

図-4　**図-3** の基底関数によるによる長さ 10 m の直線部材

キーワード　B-spline Ritz 法，Isogeometric 写像，線形弾性体，三次元自由振動問題，モード分解能
連　絡　先　〒870-0152 大分市大字牧 1666 番地　大分工業高等専門学校　TEL: 097-552-7691

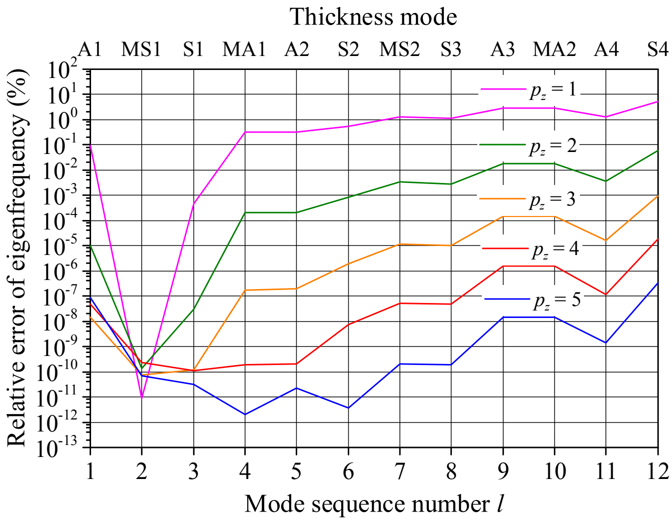

図-5 一様ノット B-spline Ritz 法の固有円振動数の相対誤差

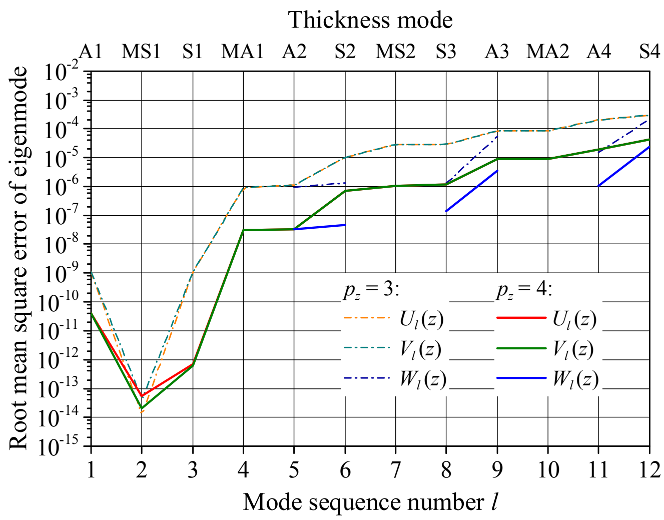

図-6 一様ノット B-spline Ritz 法の固有関数の平均二乗誤差

では，主に一様ノットによる B-spline 基底関数が用いられている．IG 写像では A_i と x_i が関係付けられるので，境界位置（$x = 0, 10$ m）に 2 つの一般化変位（A_1, A_2 と A_5, A_6）が対応することになる．他方，p と q は**図-1**と同様とし，開一様ノットを設定したときの基底関数を示したものが**図-3** であり，これにより描かれる直線を**図-4** に示した．開一様ノットを用いると正確な直線を描くことができ，A_i と x_i の対応は一対一である．

Ritz 法の試行関数は，$\phi_0(\xi)$ を$\xi = 0, 1$ で幾何学的境界条件を満足する関数として，一般的に，

$$u(\xi) = \phi_0(\xi) + \sum \alpha_i \phi_i(\xi) \quad (0 \le \xi \le 1), \tag{3}$$

と仮定する．ここで，$\phi_i(\xi)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ は$\xi = 0, 1$ で零となる基底関数である．**図-3** より，$N_{1,2}$, $N_{6,2}$ は$\phi_0(\xi)$ に，$N_{2,2}$, $N_{3,2}$, $N_{4,2}$, $N_{5,2}$ は$\phi_i(\xi)$ に相当している．よって，開一様ノットによる B-spline Ritz 法は,「一つの IG 要素」と見ることができる．

3. B-spline 基底関数のモード分解能

ここでは，長さ a，幅 b，高さ h を有する周面単純支持された長方形板の三次元自由振動問題 [5] を例題とし，$m = n = 1$ の振動モードを対象として，一様ノットによる B-spline 基底関数と開一様ノットによるそれの厚さ方向のモード分解能を調べる．ただし，x, y, z 方向の振幅変位をそれぞれ，U, V, W とする．この例題の厳密解は，固有円振動数ω (rad/s) の存在範囲によって解の形式が異なる．よって，厚さ方向に仮定する変位関数には，多項式および波数ベクトルに依存する双曲線関数と三角関数を精度良く近似できる高い変形性能と分解能が要求される．

解析モデルは $h = 0.1a$, $a = b$ とし，ポアソン比 $\nu = 0.3$ を用いた．**図-5** は一様ノット（ノットの数 $m_z = 17$）を設定し，spline 次数 p_z を 1 から 5 まで変化させたときの厳密解に対する固有円振動数（固有値）の Ritz 解の相対誤差である．ここで，l は厚さ方向のモード次数を意味する．これより，p_z を高めると各振動モードの相対誤差は小さくなるが，IG 写像との関係を考えると，p_z = 3, 4 であれば十分であろう．このとき，応力－ひずみ場は区分的に連続な 2 次または 3 次の多項式である．次に，$p_z = 3, 4$ かつ一様ノット（$m_z = 17$）に設定したときの厳密解に対する厚さ方向の固有関数の Ritz 解の平均二乗誤差（評価点数 $J = 1001$）を**図-6** に示した．これより，l が大きくなると，$p_z = 3, 4$ 共に平均二乗誤差は増大するが，その変化の傾向に大きな違いは見られない．$p_z = 4$, $m_z = 17$ (DOF = 60) に設定すれば，$l = 12$ (S4) まで（DOF の 20 % 程度）の厚さ方向の固有関数を平均二乗誤差 10^{-5} 程度の精度で求められている．

なお，開一様ノットによる B-spline 基底関数のモード分解能については，年次学術講演会当日に報告する．

謝辞：本研究の一部は，公益社団法人 LIXIL 住生活財団の研究助成を受けて行われました．また，九州大学浅井光輝准教授には，IG 解析について貴重なご助言をいただきました．ここに記して謝意を表します．

参考文献

1) Hughes et al.: Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. **194**, pp.4135-4195, 2005.
2) Mizusawa et al.: J. Sound Vib. **62**, pp.301-308, 1979.
3) Mizusawa and Kajita: Int. J. Numer. Meth. Eng. **16**, pp.897-907, 1982.
4) Nagino et al.: J. Sound Vib. **317**, pp.329-353, 2008.
5) Lee and Reismann: Int. J. Eng. Sci. 7, pp.93-113, 1969.