

CFRP 板接着補修の数値解析に対する多倍長精度計算の適用

関西大学 正会員 ○兼清泰明
 関西大学大学院 非会員 笠行健介
 関西大学 正会員 石川敏之
 関西大学 非会員 檀 寛成

1. はじめに

本研究では、CFRP 板接着補修工法における応力解析での数値解析スキームの不安定化を解消するために、近年注目されている多倍長精度計算を適用することを試みる。

2. CFRP 板接着における力学的方程式と応力の評価

図-1 に示すような突き合わせた長さ $2l$ の 2 枚の鋼板の上下面に長さ $2l$ の CFRP 板を接着固定し、鋼板の両端に引張力が作用する状況を想定する。母材の鋼板の板幅を b_s 、板厚を t_s 、CFRP 板の板幅を b_p 、鋼板の端点に働く軸力を P_0 とする。ただし、CFRP 板に生ずる力および応力は $x = 0$ に関して対称であることから、 $0 \leq x \leq l$ における挙動のみを考察の対象とする。

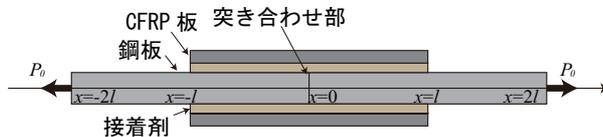


図-1 鋼板突き合わせ部に接着された CFRP 板と寸法図

位置 x において、鋼板に作用する軸力を $N_s(x)$ 、CFRP 板に作用するせん断力を $V_p(x)$ とし、新たなベクトル変数 $F(x) = (F_1(x) \cdots F_6(x))^T$ 、 $F_1(x) = N_s(x) - \xi_0(x)P_0$ 、 $F_2(x) = N'_s(x)$ 、 $F_3(x) = V_p(x)$ 、 $F_4(x) = V'_p(x)$ 、 $F_5(x) = V''_p(x)$ 、 $F_6(x) = V'''_p(x)$ を導入すると、次の方程式が成立する。

$$\frac{dF(x)}{dx} = A(x)F(x) + u(x), \quad A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_a^2(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & t_p(x)\omega_a^4(x) & -4\omega_a^4(x) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad u(x) = \begin{pmatrix} -\xi'_0(x)P_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

ここで、 G_e を接着剤のせん断弾性係数、 E_s を鋼板の弾性係数、 E_p を CFRP 板の弾性係数、 E_e を接着剤の弾性係数、 $I_p(x)$ 、 $t_p(x)$ 、 $h(x)$ をそれぞれ位置 x における CFRP 板の断面二次モーメント、CFRP 板の板幅、接着剤の厚さとして、

$$c_a(x) = \sqrt{\frac{b_p G_e}{h(x)} \frac{2}{1 - \xi_0(x)} \frac{1}{E_s b_s t_s}}, \quad \omega_a(x) = \sqrt[4]{\frac{b_p E_e}{4h(x)} \frac{1}{E_p I_p(x)}}, \quad \xi_0(x) = \frac{1}{1 + 2 \frac{E_p b_p t_p(x)}{E_s b_s t_s}} \quad (2)$$

である。鋼板の突き合わせ部および CFRP 板の端点における境界条件は、これらの変数を用いて、 $F_1(0) = -\xi_0(0)P_0$ 、 $F_3(0) = 0$ 、 $F_5(0) = 0$ 、 $F_1(l) = (1 - \xi_0(l))P_0$ 、 $F_3(l) = 0$ 、 $F_6(l) = 0$ で与えられる。

本研究では、境界条件を満たす解を構成するために、文献 [2] で提案されている、伝達マトリクス法を応用した解の構成法を用いる。すなわち、 $B(x)$ を 6 次の正方行列で、次の微分方程式の「初期値問題」、

$$\frac{dB(x)}{dx} = A(x)B(x) + V(x) \quad B(0) = I_6 \quad (6 \text{ 次単位行列}) \quad (3)$$

の解とし、 $F(x) = B(x)F(0)$ により解を構成した上で、 $F(0)$ に境界条件の情報がすべて取り入れられるようにする。ただし、 $V(x)$ は 1 行 1 列成分が $\xi'(x)/\xi(0)$ で他の成分はすべてゼロであるような 6 次の正方行列である。

接着補修のはく離の評価において必要となる、鋼部材に CFRP 板を接着した場合の接着剤に生じるせん断応力 $\tau(x)$ と垂直応力 $\sigma_y(x)$ は次式で与えられる。

$$\tau(x) = \frac{1}{2b_p} F_2(x), \quad \sigma_y(x) = -\frac{1}{b_p} F_4(x) \quad (4)$$

3. 多倍長精度計算を適用した数値解法

式(1)は、係数行列 $A(x)$ が x に依らない定数行列である場合には解を解析的な形で表現することができるが、空間変数 x に依存して変化する場合にはそのような解析的な解を導出することは一般には困難である。例えば、CFRP 板端部の応力を低減させるためのテーパを取付けた場合や、接着剤の厚さが一様とならない場合、また接着剤厚さが空間的に不規則に変動する場合 [1] などでは解析解の導出が困難になってしまう。

このような場合には、式(1)を数値的に解くための離散解法スキームを適用して数値解を導出しなければならない。しかし、 $V_p(x)$ に対する方程式が高階方程式であることに加えて、端部の応力集中による変動が激しいことから、スキームが不安定となることが少なくない。図-2はCFRP板厚を $t_p(x) = 30[\text{mm}]$ (一定)、接着剤厚さを $h(x) = 0.5[\text{mm}]$ (一定) と設定し、他のパラメータ値は文献 [1] と同じ設定とした上で、式(1)の解を Euler 法を用いて数値的に導出し、式(4)に従ってせん断応力 $\tau(x)$ と垂直応力 $\sigma_y(x)$ を算出して x の関数としてプロットしたものである。ただし、計算領域を 2000 等分したメッシュを設定し、さらに精度を上げるために 4 倍精度 (long double 型) を導入して算出してある。これより、 $\sigma_y(x)$ が端部付近で激しく振動しており、定性的に正しい解が得られていないことがわかる。これはいわゆる浮動小数点計算により生じた丸め誤差が計算過程で次第に増幅してスキームを不安定化させていることに原因があると考えられる。なお、メッシュ分割数を上げて、さらに離散解法の精度を上げるために 4 次の Runge-Kutta 法を適用しても、不安定化は解消できないことも明らかとなった。

こういった問題を解消するための有効な手段として、多倍長精度計算と呼ばれる手法が近年注目されてきている。この手法では有効桁数を飛躍的に大きく設定でき、これにより丸め誤差を劇的に小さく抑制し、図-2に見られるような不安定化を回避することができる。本論文では、C 言語ベースの多倍長計算ライブラリ GMP [3] を用いた計算を試みた。

図-3は GMP において有効桁数を 10 進約 50 桁に設定し、図-2と同じ計算を実行して得られた結果をプロットしたものである。図-2に見られるような垂直応力の端部での激しい振動挙動が解消され、定性的に正しい結果が得られていることがわかる。

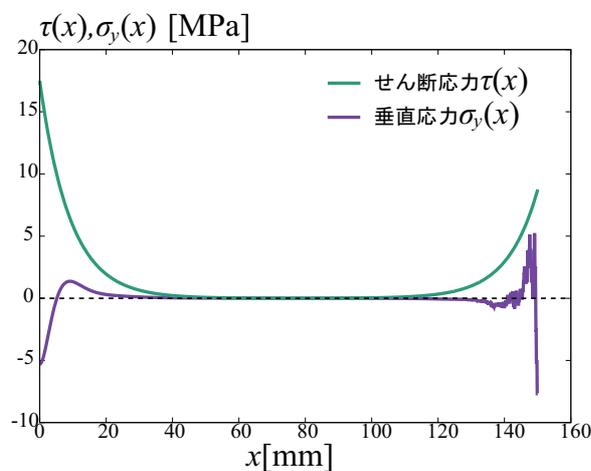


図-2 4倍精度の Euler スキームを用いて算出した応力値の空間変動

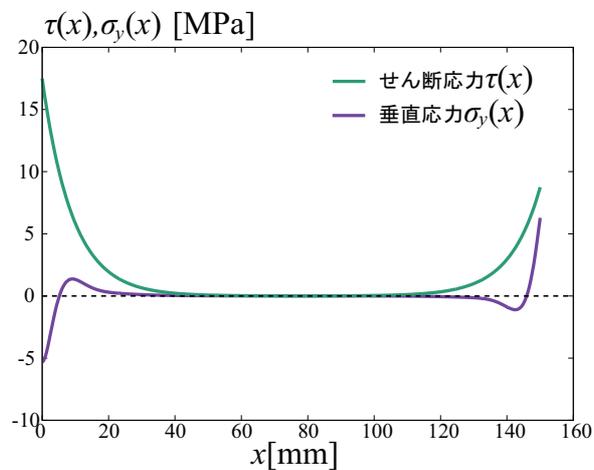


図-3 10進50桁の多倍長精度計算による Euler スキームを用いて算出した応力値の空間変動

参考文献

- [1] 兼清泰明, 笠行健介, 石川敏之: “空間変動型確率微分方程式を用いた CFRP 板接着補修における不規則性解析”, 土木学会論文集 A2(応用力学), Vol. 73, No. 2, L11-L22, 2017.
- [2] 田中泰明: “剛性率の空間的不規則変動によるせん断梁の確率的応答”, 日本機械学会論文集 (C 編), 第 66 巻, pp44-49, 2000.
- [3] The GNU Multiple Precision Arithmetic Library Home Page, (“<https://gmplib.org/>”, 2018/2/27 現在)