

インピーダンスが周波数依存性を有する系の運動方程式の解法に関する一検討

(公財) 鉄道総合技術研究所 正会員 ○月岡桂吾 室野剛隆

東南大学 正会員 佐藤忠信

1. はじめに

地盤と構造物系の動的相互作用問題において、地盤インピーダンスが周波数依存性を有することは周知の事実である。地盤－構造物系の動的解析を、周波数応答解析によって実施する場合、このインピーダンスを考慮することによって精度の高い解析が可能となる。しかし、強震動下において、構造物系が非線形化する問題に対しては、時刻歴非線形解析を用いる必要がある。したがって、地盤と構造物系の動的相互作用問題において、双方の現象を適切に考慮するためには、時間領域に変換したインピーダンスを用いて、時刻歴非線形解析を実施することが求められる。周波数依存性を有するインピーダンスの時間領域変換法に関しては、いくつか手法が提案されている。佐藤の研究では、ヒルベルト変換によって因果律を拘束条件として与えたインピーダンスを、フーリエ逆変換を用いて時間領域に変換する方法を提案している¹⁾。また、中村の研究では、インピーダンスをインパルス応答の同時成分と時間遅れ成分によって表現する方法を提案している²⁾。本研究では、1自由度系を対象として、式の取り扱いが容易な前者の方法に関する検討を実施した。

2. インピーダンスの周波数依存性を考慮した時刻歴解析の概要

インピーダンスの周波数依存性を考慮した時刻 t_n における1自由度系の運動方程式は式(1)のようになる。

$$m\ddot{x} + c_0\dot{x} + k_0x = -m\ddot{z} - \int_{-\infty}^{\infty} k^*(t_n - \tau)x(\tau)d\tau \quad \text{式 (1)}$$

ここで、 x および z はそれぞれ変位応答および入力地震動を表している。また、 m は質量を、 k_0 および c_0 はそれぞれインピーダンス実部および虚部の非周波数依存成分（以下、特異成分と呼ぶ）、 $k^*(t)$ はインピーダンスのフーリエ逆変換である。式(1)の右辺の畳み込み積分区間には、現時刻 t_n より未来の情報(t_n, ∞]に関する積分が含まれているため、素直に積分することはできない。しかし、積分区間(t_n, ∞]を考えた場合、 $x(\tau)$ は未来の情報であるが、 $k^*(t_n - \tau)$ は負の時刻における情報となる。今、 $k^*(t)$ は因果関数であるから、 $k^*(t)$ が $t < 0$ において恒等的にゼロとなるので、区間(t_n, ∞]においては、 $k^*(t - \tau)x(\tau) = 0$ となる。また、 $x(t)$ は区間 $(-\infty, 0]$ において恒等的にゼロとなる。よって、式(1)の積分区間は $[0, t_n]$ となり、運動方程式は式(2)のようになる。

$$m\ddot{x} + c_0\dot{x} + k_0x = -m\ddot{z} - \int_0^{t_n} k^*(t - \tau)x(\tau)d\tau \quad \text{式 (2)}$$

一方、式(2)の運動方程式を時間領域で解くためには、各時間刻みに離散化して解くことになる。その際に、以下の2つの問題が発生する。

(A) $k^*(t)$ が図1のように時刻 $t = 0$ において不連続性を有する場合、図1のように離散化されるので、 $-\Delta t \leq t \leq 0$ において非ゼロな値（以下、非因果的成分）が生じるため、式(2)の右辺の畳み込み積分の積分範囲が $0 \leq \tau \leq t_{n+1}$ に拡大すると考えられる。そこで、式(2)を式(3)のように変形する。式(3)の右辺の第3項は、 $t_n \leq \tau \leq t_{n+1}$ における畳み込み積分の表現であり、 $k^*(t = 0)$ 、 x_n および Δt によって表現される。

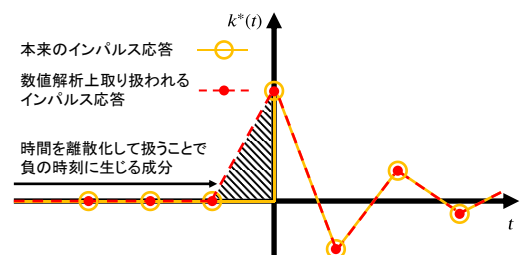


図1 非因果的成分の概要

$$m\ddot{x} + c_0\dot{x} + k_0x = -m\ddot{z} - \int_0^{t_n} k^*(t_n - \tau)x(\tau)d\tau - \frac{1}{2}k^*(0)x_n\Delta t \quad \text{式 (3)}$$

(B) 2つの目の問題は、積分法である。本研究では、畳み込み積分の積分法として、次の2通りの方法を用いる。1つ目は、時間刻み間の被積分領域を長方形によって近似する方法（以下、矩形積分法）である。2つ目は、時間刻み間の $k^*(t)$ を線形近似し、これと平均加速度法に基づいて表現された変位の式を用いて、畳み込み積分を解析的に実行する方法である（以下、半解析的手法）。

キーワード 地盤インピーダンス、周波数依存性

連絡先 〒186-8540 東京都国分寺市光町 2-8-38 (公財) 鉄道総合技術研究所 鉄道地震工学研究センター

3. 数値解析例

3.1 解析条件

本研究では、地表面上の円形基礎の近似式³⁾から、インピーダンスを算出した。インピーダンスおよび $k^*(t)$ を図2および図3に示す。ここで、インピーダンス虚部に対して因果律を拘束条件として与えている。質量 m は、角振動数 $\omega = 0$ のときのインピーダンス実部から算出される固有周期 T_0 が0.5秒となるように算出した ($m = 8.17 \times 10^6 \text{ kg}$)。また、入力地震動として阪神淡路・神戸海洋気象台 NS 波を与えた。本研究では、上記の条件に対して、表1に示すような3通りの解析を実施した。図2に示すように、Case1-1およびCase1-2では $\omega = 0$ のときの値を、Case2では全成分の平均値を、インピーダンス実部の特異成分としている。

3.2 解析結果

図4に各ケースにおける変位波形を示す。図4において、緑色の線は周波数応答解析の結果を、青色および赤色の破線はそれぞれ、矩形積分法および半解析的手法を用いた時刻歴解析の結果である。Case1-1では、いずれの積分手法を用いても、時刻歴解析および周波数応答解析の結果が一致しない。逆に、Case2では、積分手法に依らず、双方の結果がよく一致している。また、Case1-2では、畳み込み積分に半解析的手法を用いた場合のみ、双方の結果が一致する。この要因として、矩形積分法において、 $t_{n-1} \leq t \leq t_n$ における畳み込み積分の被積分領域を、長方形では適切に表現できないことが考えられる。

以上より、数値解析において時間領域に変換したインピーダンスを用いる場合、時間の離散化に起因する非因果的成分への配慮が必要となることが分かる。これを考慮しなかった場合、時刻歴解析において正しい解を得ることができない。また、考慮した場合においても、 $k^*(t=0) \neq 0$ となると、畳み込み積分を矩形積分法によって精度良く計算することができない。

4. おわりに

本研究では、佐藤の方法を用いて、1自由度系を対象としたインピーダンスの周波数依存性を考慮した時刻歴解析を実施した。その結果、時間の離散化に起因する非因果的成分を考慮する必要があることが示された。また、畳み込み積分を矩形積分法によって行う際、 $k^*(t=0) \neq 0$ の場合は精度良く計算できず、 $k^*(t=0) = 0$ の場合は精度良く計算できることが明らかとなった。今後の課題として、本手法を多自由度系や非線形問題に適用することが挙げられるが、その際のハンドリング性を考慮するに、 $k^*(t=0) = 0$ となるように、インピーダンス実部の特異成分を取ることが望ましいと思われる。

参考文献：1) 佐藤：地盤と構造物の動的相互作用の解析法，土と基礎，40巻，8号，1992。2) 中村：振動数依存性を有する関数の時間領域変換法の適用性検討，竹中技術研究報告，No66，2010。3) 田治見：建物と地盤の相互作用，彰国社，1977。

表1 検討する解析ケース

	$k^*(t=0)$	非因果的成分の考慮
Case1-1	$k^*(t=0) \neq 0$	無し
Case1-2	$k^*(t=0) \neq 0$	有り
Case2	$k^*(t=0) = 0$	有り

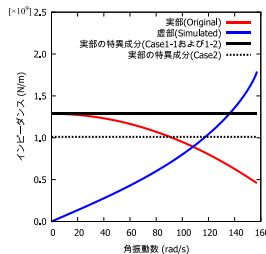


図2 インピーダンス

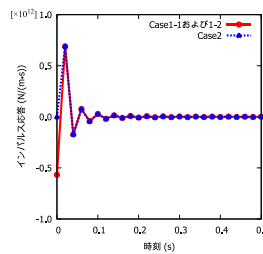
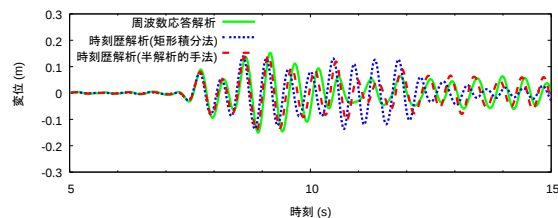
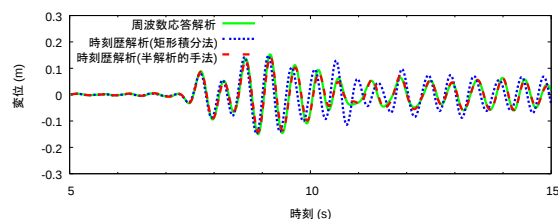


図3 $k^*(t)$



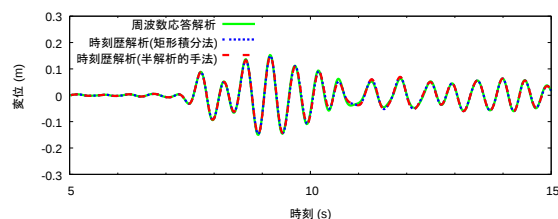
(a) Case1-1

($k^*(t=0) \neq 0$ ・非因果的成分未考慮)



(b) Case1-2

($k^*(t=0) \neq 0$ ・非因果的成分考慮)



(c) Case2

($k^*(t=0) = 0$ ・非因果的成分考慮)

図4 各ケースにおける変位波形