

任意断面梁のせん断遅れを考慮できる梁要素の定式化

東北大学大学院工学研究科 ○ 正会員 齊木 功
川田工業株式会社 正会員 西井 大樹
東北大学大学院工学研究科 正会員 岩熊 哲夫

1. はじめに

幅広フランジを有する梁のせん断遅れは, Reissner¹⁾によって解析され, その基本的な考え方は現在も用いられている. この手法はせん断遅れ変位の分布を仮定することで可能となり, 箱型断面のような比較的単純な断面の梁ではよい精度で解析が可能であるが, 複雑な断面に対してはせん断遅れ変位を精度よく仮定することは容易ではない. これに対し, 著者らは周期境界条件を用いた均質化梁²⁾に基づいて梁の代表体積要素にせん断力を作用させ, 代表体積要素の軸方向変位の水平方向分布を数値的に求め解析的手法に組み込む半解析的手法を提案した^{3),4)}. 本報告では, この半解析的手法の精度改善を目的として軸方向変位の水平方向に加えて鉛直方向分布も考慮した解析の方法を提案する.

2. せん断遅れの半解析手法

図-1に示すような任意形状断面の梁を解析対象とし, 橋軸方向を x_1 , 橋軸直角水平方向を x_2 , 鉛直方向を x_3 とする正規直交座標系を設定する. 解析対象領域 V を, フランジ等のせん断遅れを考慮する領域 $V_F := S_F \times L$ とそれ以外のウェブ等の領域 $V_W := S_W \times L$ に区別する. ここで, L は橋軸方向の解析対象領域であり, $-\frac{\ell}{2} \leq x_1 \leq \frac{\ell}{2}$ とする.

せん断遅れによる橋軸方向の変位を, 断面内の分布形状を表す関数 $f(x_2, x_3)$ とその大きさを表す橋軸方向の関数 $g(x_1)$ とに変数分離し, $f(x_2, x_3)g(x_1)$ と表すこととする. すると, V_F における橋軸方向の変位 u_1 は曲げによる変位とせん断遅れによる変位の和として

$$u_1 = x_3 \left(\tilde{\gamma} - \frac{du_3(x_1)}{dx_1} \right) + f(x_2, x_3)g(x_1) \quad (1)$$

と表すことができる. ここで, u_3 は梁のたわみ, $\tilde{\gamma}$ は梁の面外せん断ひずみを表す. 周期境界条件のもとで梁の代表体積要素にせん断変形を与えた有限要素解析を行い, 算出された各節点の軸方向変位を最小値 0, 最大値 1 になるように正規化して数値的に f を求める.

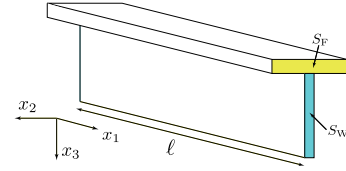


図-1 解析対象の梁とその断面

式 (1) で定義した変位場をもとにひずみを定義し, 梁の全ポテンシャルエネルギーが停留することから u_3 と g と $\tilde{\gamma}$ に関する微分方程式

$$-(EI)\phi - R_1 \frac{dg}{dx_1} + M = 0 \quad (2)$$

$$-R_1 \frac{d\phi}{dx_1} - R_2 \frac{d^2g}{dx_1^2} + R_3g = 0 \quad (3)$$

$$G\kappa A\tilde{\gamma} - \frac{dM}{dx_1} = 0 \quad (4)$$

を得る. ここで, E は Young 率, G は剪断弾性係数, κ はせん断補正係数, M は曲げモーメント, (EI) は全断面の曲げ剛性, ϕ は

$$\phi := \frac{d\tilde{\gamma}}{dx_1} - \frac{d^2u_3}{dx_1^2} \quad (5)$$

と定義される曲率であり, R_i ($i = 1, 2, 3$) は

$$R_1 := \int_{S_F} E x_3 f dS, \quad R_2 := \int_{S_F} E f^2 dS$$

$$R_3 := \int_{S_F} G \left(\frac{df}{dx_2} \right)^2 dS$$

と定義した. 数値的に得られた $f(x_2, x_3)$ から Gauss 積分によって R_1, R_2, R_3 を求め, 微分方程式を解く.

3. せん断遅れを組み込んだ梁要素の定式化

Iwakuma et al.⁵⁾の2節点 Timoshenko 梁要素に, せん断遅れの自由度を組み込んだ梁要素を定式化する. 要素長を ℓ , 両端の節点を節点 1, 節点 2 とし, 節点 1 で $x_1 = 0$, 節点 2 で $x_1 = \ell$ となる局所座標系 x_1 を定義する. 節点 1, 2 におけるたわみ $u_3(x_1)$ をそれぞれ $(u_3)_1^e, (u_3)_2^e$, 節点 1, 2 における断面の回転角 $\theta(x_1)$ をそれぞれ

Key Words: 周期境界条件, せん断遅れ, 均質化梁, 有限要素解析

〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 構造強度学研究室

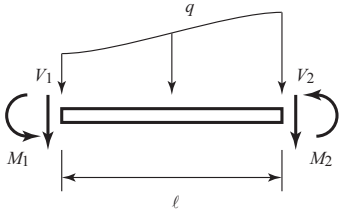


図-2 提案する Timoshenko 梁要素

$(\theta)_1^e, (\theta)_2^e$ と表す. Iwakuma et al.⁵⁾ の Timoshenko 梁要素では, 梁の面外せん断ひずみ $\tilde{\gamma}(x_1)$ は要素内で一定としており, 要素内の面外せん断ひずみを

$$\tilde{\gamma}(x_1) \equiv (\tilde{\gamma})^e = \text{constant} \quad (6)$$

と表す. 以上から, たわみ角 ϑ は

$$\vartheta(x_1) := -\frac{du_3(x_1)}{dx_1} = \theta(x_1) - \tilde{\gamma}(x_1) \quad (7)$$

であり, 節点でのたわみ角 $(\vartheta)_i^e$ ($i = 1, 2$) は

$$(\vartheta)_i^e = (\theta)_i^e - (\tilde{\gamma})^e \quad (8)$$

となる. 要素内任意点におけるたわみは 3 次の内挿関数 $\psi_i(x_1)$ を用いて

$$u_3(x_1) = \psi_1(x_1)(u_3)_1^e + \psi_2(x_1)\{(\theta)_1^e - (\tilde{\gamma})^e\} \quad (9)$$

と離散化する. 次に, 節点 1, 2 におけるせん断遅れ変位 g をそれぞれ $(g)_1^e, (g)_2^e$ と表し, せん断遅れ変位を 1 次の内挿関数 $\phi_i(x_1)$ ($i = 1, 2$) を用いて

$$g(x_1) = \phi_1(x_1)(g)_1^e + \phi_2(x_1)(g)_2^e \quad (10)$$

と離散化する.

図-2 に示すように要素の軸方向に垂直方向の外力, 軸方向の外力, モーメント外力をそれぞれ V, H, M と表し, 節点 i に作用する外力をそれぞれ V_i, H_i, M_i とする. また, 要素に垂直な分布外力を $q(x_1)$ とする.

1 要素での全ポテンシャルエネルギーの停留条件から

$$\int_0^\ell \left\{ -q\delta u_3 + EI \frac{d^2 u_3}{dx_1^2} \frac{d^2 \delta u_3}{dx_1^2} - R_1 \frac{dg}{dx_1} \frac{d^2 \delta u_3}{dx_1^2} \right\} dx_1 - V\delta u_3 \Big|_{x_1=0} - V\delta u_3 \Big|_{x_1=\ell} - M \frac{d\delta u_3}{dx_1} \Big|_{x_1=0} - M \frac{d\delta u_3}{dx_1} \Big|_{x_1=\ell} = 0 \quad (11)$$

$$\int_0^\ell \left\{ GkA\tilde{\gamma}\delta\tilde{\gamma} - EI \frac{d^2 u_3}{dx_1^2} \frac{d\delta\tilde{\gamma}}{dx_1} + R_1 \frac{dg}{dx_1} \frac{d\delta\tilde{\gamma}}{dx_1} \right\} dx_1 = 0 \quad (12)$$

$$\int_0^\ell \left\{ R_3 g \delta g + \left(-R_1 \frac{d^2 u_3}{dx_1^2} + R_2 \frac{dg}{dx_1} \right) \frac{d\delta g}{dx_1} \right\} dx_1 \quad (13)$$

を得る.

式 (9), (10) を用いて式 (11), (12), 式 (13) を離散化し, $(\tilde{\gamma})^e$ を静的縮約することで, 要素剛性方程式

$$\mathbf{k} \begin{Bmatrix} (u_3)_1^e \\ (\theta)_1^e \\ (g)_1^e \\ (u_3)_2^e \\ (\theta)_2^e \\ (g)_2^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{q\ell}{2} + V_1 \\ -\frac{q\ell^2}{12} + M_1 \\ 0 \\ \frac{q\ell}{2} + V_2 \\ \frac{q\ell^2}{12} + M_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

を得る. ここに, 要素剛性行列 $\mathbf{k}$ は

$$\mathbf{k} := \begin{bmatrix} (\mathbf{k})_1 & (\mathbf{k})_2 \\ (\mathbf{k})_2^T & (\mathbf{k})_3 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$(\mathbf{k})_1 := \begin{bmatrix} \frac{6}{\ell^2 \alpha} & -\frac{3}{\ell \alpha} & 0 \\ & \frac{2}{\alpha} \left(1 + \frac{3EI}{\ell^2 GkA} \right) & \frac{R_1}{\ell} \\ \text{symm.} & & \frac{R_2}{\ell} + \frac{R_3 \ell}{3} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$(\mathbf{k})_2 := \begin{bmatrix} -\frac{6}{\ell^2 \alpha} & -\frac{3}{\ell \alpha} & 0 \\ \frac{3}{\ell \alpha} & \frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{6EI}{\ell^2 GkA} \right) & -\frac{R_1}{\ell} \\ 0 & -\frac{R_1}{\ell} & -\frac{R_2}{\ell} + \frac{R_3 \ell}{6} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$(\mathbf{k})_3 := \begin{bmatrix} \frac{6}{\ell^2 \alpha} & \frac{3}{\ell \alpha} & 0 \\ & \frac{2}{\alpha} \left(1 + \frac{3EI}{\ell^2 GkA} \right) & \frac{R_1}{\ell} \\ \text{symm.} & & \frac{R_2}{\ell} + \frac{R_3 \ell}{3} \end{bmatrix} \quad (18)$$

とし, α は

$$\alpha := \frac{\ell}{2EI} + \frac{6}{\ell GkA} \quad (19)$$

と定義した.

参考文献

- 1) Reissner, E.: Analysis of shear lag in box beam by principle of minimum potential energy, *Q. Appl. Math.*, 4(3), pp.268–278, 1946.
- 2) 斉木 功, 鍵一彰, 山田 真幸, 瀬戸川 敦, 岩熊 哲夫: 非均質 Timoshenko 梁の平均物性評価, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.15, pp.161–169, 2012.
- 3) 斉木 功, 西井 大樹, 岩熊 哲夫: 任意断面梁のせん断遅れ解析のための半解析的手法, 土木学会論文集 A2, Vol.71, No.2, pp.I.11–I.18, 2015.
- 4) 斉木 功, 西井 大樹, 岩熊 哲夫: 任意断面梁のせん断遅れ解析の高精度化, 土木学会論文集 A2, Vol.72, No.2, pp.I.53–I.62, 2016.
- 5) Iwakuma, T., Ai, M. and Nishino, F.: On derivation of Timoshenko beam stiffness equation, *Proc. JSCE*, No.312, pp.119–128, 1981.