# 超音波スピーカーに関する Westervelt 方程式の波動伝播解析

# 1. 序論

近年、超音波の持つ特性を利用し特定の領域のみに可聴音 場を作り出す超音波スピーカーの実用化が進んでいる<sup>1)2)3)</sup>。 可聴音を放射する一般的なスピーカーが生成する音は回折 等の影響で音波が拡散して広い範囲に伝播する。これに対 し超音波スピーカーが生成する音は超音波の高い指向性を 保持したまま伝播する。そのため超音波スピーカーは周囲 への拡散を気にせず狙った方向へ音を放射することが可能 であり、また超音波特有の分散特性を利用することで、特 定の領域で可聴音を再現することが可能である。これらの 性質から、博物館やアミューズメント施設などの音声アナ ウンスなどに利用されている。

本研究では超音波スピーカーが生成する音場の数値解析 を目的とする。波動方程式に減衰や非線形効果を考慮した 項が加わった Westervelt 方程式に支配される単純な領域に おいて、超音波スピーカーの入力をモデル化した初期値境 界値問題を考える。音場の初期値問題を、差分法を用いて 数値解析を行い<sup>4)5)</sup>、指向性や可聴音場の再現を検証する。

### 2. 定式化

### (1) Westervelt 方程式

本研究では粘性や非線形効果などを表現した次の Westervelt 方程式 (Westervelt equation) に支配される音場を考 える  ${}^{6)7)8)}$ 。

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{\delta}{c_0^4} \frac{\partial^3 p}{\partial t^3} + \frac{\beta}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2} = 0$$
(1)

ここに、音圧をp、音速を $c_0$ 、媒質の密度を $\rho_0$ とする。 第3項は散逸項を表しており、 $\delta$ は音波の吸収に関わる定 数である。また、第4項は非線形効果項を表し、 $\beta$ は非線 形係数と呼ばれ

$$\beta = 1 + \frac{B}{2A}$$

と表される。ここに *B*/*A* は非線形パラメータと呼ばれる。 このように Westervelt 方程式は粘性のない完全流体の波動 方程式に散逸項と非線形効果項を加えた式である。

# (2) 差分法の適用

次に、本研究で用いた差分解法について説明する。ここ では、2 次元領域を考え  $\Delta x$ 、 $\Delta y \in x$ 、y 方向の、 $\Delta t$  を時 間の刻み幅とする。また、(i, j)はそれぞれ(x, y)座標の位置番号であり、下つき添字は時間ステップを表す。

上記の Westervelt 方程式を離散化すると、以下の式が得られる。

$$p_{n+1}(i,j) = 2p_n(i,j) - p_{n-1}(i,j) \\ + \left(\frac{c_0\Delta t}{\Delta x}\right)^2 (p_n(i-1,j) - 2p_n(i,j) + p_n(i+1,j)) \\ + \left(\frac{c_0\Delta t}{\Delta y}\right)^2 (p_n(i,j-1) - 2p_n(i,j) + p_n(i,j+1)) \\ + \frac{\delta}{8c_0^2\Delta t} (6p_n(i,j) - 23p_{n-1}(i,j) + 34p_{n-2}(i,j) \\ - 24p_{n-3}(i,j) + 8p_{n-4}(i,j) - p_{n-5}(i,j)) \\ + \frac{\beta}{\rho_0 c_0^2} (2p_n^2(i,j) - 5p_{n-1}^2(i,j) \\ + 4p_{n-2}^2(i,j) - p_{n-3}^2(i,j))$$
(2)

これを逐次的に解くことで時間発展する音場を計算する。

#### **3.** 数値計算結果

本研究での問題設定は以下の通りである。支配方程式 (1) と以下に示す境界条件を持つ初期値境界値問題を解く。今回 は音源での入射波と、遠方場での音圧が 0 であるという条件 を境界条件とした。初期条件は斉次の初期条件とした。更に、 媒質を空気と想定し、 $c_0 = 340$ [m/s]、 $\rho_0 = 1.293$ [kg/m<sup>3</sup>]、  $\delta = 3.9 \times 10^{-5}$ [m<sup>2</sup>/s]、 $\beta = 1.4$ とした。空間の刻み幅は  $\Delta x = \Delta y = 5.0 \times 10^{-4}$ [m]、時間の刻み幅は  $\Delta t = 1.0 \times 10^{-6}$ [s] とした。入射波  $P_s(t)$ は以下のような、音圧の振幅 が  $P_0=1.0$ [Pa] で、周波数は  $f_1=50$ [kHz] と  $f_2=46$ [kHz] の 和と差の周波数成分を持つ、2 つの正弦波の合成波とする。

$$P_s(t) = 2P_0 \sin(2\pi f_1 t) \cos(2\pi f_2 t)$$
  
=  $P_0 \sin(2\pi (f_1 + f_2)t) + P_0 \sin(2\pi (f_1 - f_2)t)$  (3)

 $P_s(t)$ を図1に図示する。



**Key Words:** Westervelt equation, parametric speaker, finite-difference methods **〒** 606-8501 京都府京都市左京区吉田本町 京都大学大学院 情報学研究科 先端数理科学専攻

京都大学大学院 非会員 若原 孝浩 京都大学大学院 正会員 〇吉川 仁

また、これらを用いて1次元領域において数値計算を行 い、音源から3m、10m地点における音波が到達した直後の 音圧の波形の時間変化を拡大したものを図2、図3に示す。



図-2 3m 地点での音圧変化 (拡大図)



図-3 10m 地点での音圧変化 (拡大図)

図2と図3から、離れた地点では差周波である4[kHz]の 音波、つまり式(3)の右辺第2項の音波が短時間ではある が再現されていることがわかる。

次に 2 次元領域での計算結果を示す。ここでは、y=0を 中心とし、y軸上にy軸と平行に置かれた幅 10cmの超音 波スピーカーを音源とした。図 4、図 5 に  $2.95 \times 10^{-3}$ [s] 後 の音圧の絶対値をプロットした。



図-4 t=2.95×10<sup>-3</sup>[s] での音圧 p(x,y)



図-5 音波の先端付近の様子

図4から、音源の正面で高い音圧を持つ波が集まっている ことがわかり、指向性の高さが見て取れる。また、図5にx軸 付近の音源から出た波の先端部の音圧の絶対値を図示した。x座標が0.96[m]  $\leq x \leq 1.0$ [m]、y座標が-0.1[m]  $\leq y \leq 0.1$ [m] の長方形領域で差周波成分である 4[kHz] の波が先に到達し ている様子がわかる。

次に、3m 地点での音が到達した直後の音圧の時間変化を 図 6 に示す。



図-6 3m 地点での音圧変化 ((2 次元)

1次元での解析結果と同様に、音波の到達直後から差周 波成分の音が再生されていることがわかる。

## 4. 結論

本研究では超音波スピーカーにより生成される音場を、 高周波数の音場に関する支配方程式である Westervelt 方程 式に差分法を適用することで数値的に復元した。周波数の 大きく異なる2つの音波の合成波を入射波とする音場の伝 播を数値的に再現し、音源から一定の距離が離れた特定の 領域で低周波の音波が一時的に再生されることを確認した。

#### 参考文献

- 1) 西浦敬信, パラメトリックスピーカを用いた音場再生技術, 日本音響学会誌 71 巻 2 号, pp.89-84, 2015.
- 2) 小松崎俊彦,岩田佳雄,パラメトリックスピーカーを用いた 能動騒音制御(数値計算モデルの構築と干渉音場の検討),日 本機械学会論文集,76巻761号,pp.177-184,2010.
- 3) 岩崎亘, 生藤大典, 中山雅人, 西浦敬信, 音声再生に適した パラメトリックスピーカのための振幅・周波数ハイブリッド 変調方式における最適パラメータの実験的検討, 電子情報通 信学会, pp.7-12, 2014.
  4) Ibrahim M. Hallaj and Robin O. Cleveland, *FDTD sim*-
- 4) Ibrahim M. Hallaj and Robin O. Cleveland, FDTD simulation of finite-amplitude pressure and temperature fields for biomedical ultrasound, The Journal of the Acoustical Society of America 105.5, pp.7-12, 1999.
- 5) 山谷千秋,井上浩,吸収媒質中の超音波伝搬と熱の解析に関 する検討,電子情報通信学会,pp.37-42, 2005.
- 神部勉,流れと音の物理,日本流体力学会誌「ながれ」Vol. 20, pp.174-186, 2001.
- 7) Westervelt, Peter J, *Parametric acoustic array*, The Journal of the Acoustical Society of America 35.4, pp.535-537, 1963.
- 8) 鎌倉友男, 非線形音響-基礎と応用-, コロナ社, 2014