不連続性を有する問題におけるDG-FEMの有効性の検討

中央大学大学院 学生員 ○ 伊藤 翔
中央大学大学院 学生員 凌 国明
The Ohio State University 非会員 Ethan J. Kubatko
(株) エイト日本技術開発 正会員 大川 博史
中央大学 正会員 樫山 和男

1. はじめに

海岸・河川・湖沼等の水環境流れの数値シミュレーションには浅水長波方程式が一般的に用いられる．浅水長波方程式は双曲型の方程式であり，たびたび段波や跳水等といった不連続的な解を有する．このような現象に対して，近年注目されている数値解析手法にDiscontinuous Galerkin 有限要素法[1]（以下 DG 法）がある．DG 法は従来の Continuous Galerkin 有限要素法（以下 CG 法）と異なり，要素境界において解の不連続性を許容する．また，要素境界において数値フラックスを導入することで，要素毎の局所的な保存性を満足することが可能である．

本研究では，浅水長波方程式の高精度解法の構築を目的として DG 法に着目した．DG 法の有効性について検討を行うため，段波問題において三角形 1 次要素および 2 次要素を用いた DG 法の解析結果と従来の CG 法（SUPG 法に基づく安定化有限要素法）[2] の解析結果との比較を行った．

2. 数値解析手法

(1) 支配方程式

支配方程式として非線形浅水長波方程式を用いる．

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F(U)}{\partial x}+\frac{\partial G(U)}{\partial y}=S(U) \tag{1}$$

ここで，U は保存変数，$F(U)$，$G(U)$ は流束関数，$S(U)$ はソース項であり，それぞれ以下のように定義される．

$$U=[\ h\ \ uh\ \ vh\ ]^T \tag{2}$$

$$F(U)=[\ uh\ \ u^2h+\frac{1}{2}gh^2\ \ uvh\ ]^T \tag{3}$$

$$G(U)=[\ vh\ \ uvh\ \ v^2h+\frac{1}{2}gh^2\ ]^T \tag{4}$$

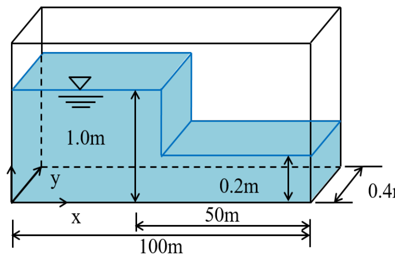
$$S(U)=[\ 0\ \ -gh\frac{\partial z}{\partial x}\ \ -gh\frac{\partial z}{\partial y}\ ]^T \tag{5}$$

ここで，h は全水深，u，v は x，y 方向の断面平均流速，g は重力加速度，z は基準面からの高さである．

(2) DG 法による空間方向の離散化

式 (1) に試験関数 r を乗じ，Gauss の発散定理を用いると以下に示す弱形式が得られる．

$$\int_{\Omega_e}\frac{\partial U}{\partial t}r d\Omega-\int_{\Omega_e}F(U)\frac{\partial r}{\partial x}d\Omega+\int_{\partial\Omega_e}F\cdot n_x r ds -\int_{\Omega_e}G(U)\frac{\partial r}{\partial y}d\Omega+\int_{\partial\Omega_e}G\cdot n_y r ds=\int_{\Omega_e}S(U)\cdot r d\Omega \tag{6}$$



図－1 段波問題

ここで，n_x，n_y はそれぞれ単位法線ベクトルの x，y 方向成分である．

物理量と試験関数の近似式は以下のように表される．

$$U\approx U_h=\sum_{i=0}^{N}U_i(t)\phi_i(x,y), \tag{7}$$

$$r\approx r_h=\sum_{j=0}^{N}\alpha_i\phi_j(x,y), \tag{8}$$

ここで，$U_i(t)$ は自由度，$\phi(x,y)$ は基底関数，α_i は任意定数である．本研究では，基底関数に直交性を有する triangular Dubiner basis[3] を用いる．この特性により質量行列が対角行列となり，陽的解法を用いることが可能となる．その他の係数行列の評価には Gauss の数値積分法を用いる．

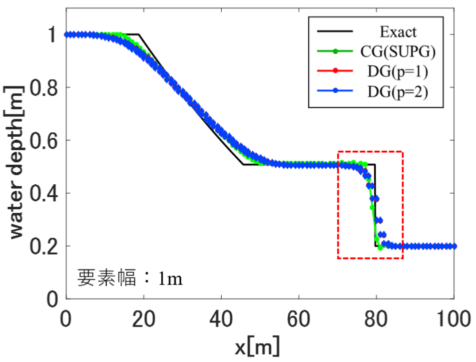
要素境界 $\partial\Omega_e$ において導入する数値フラックスとして，本研究では Local Lax-Friedrichs flux[4] を用いる．また，不連続部における数値振動を抑えるために，Slope Limiter 処理[5] を導入する．また，時間方向の離散化には陽的 Runge-Kutta 法を用いる．

3. 数値解析例

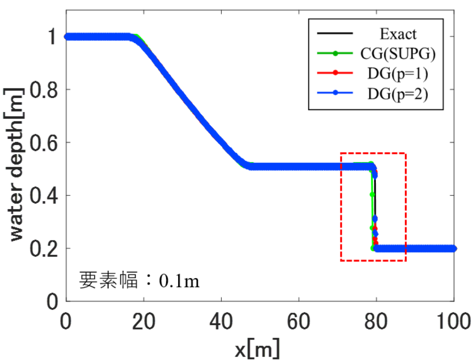
本研究では，DG 法の有効性について検討するために，数値解析例として**図－1** に示すような段波問題を取り上げる．微小時間増分量を 0.001s，両壁面で slip 条件とし，x 方向（伝播方向）要素幅を変更して解析を行う．なお，y 方向要素幅を 0.2m とした．

図－2，3 はそれぞれ，x 方向（伝播方向）要素幅が 1.0m と 0.1m での解析における 10s 後の水面形状である．図より，特に赤枠で囲った不連続部において DG 法と CG 法の解析結果に有意な差がみられることが確認できる．また，**図－4，5** は**図－2，3** における不連続部を拡大したものであり，**図－6** は DG 法と CG 法の 10s 後の水深の二乗平均平方根誤差を，要素幅を変更して比較したものである．図より，CG 法においてはメッシュの細分化による精度の向上

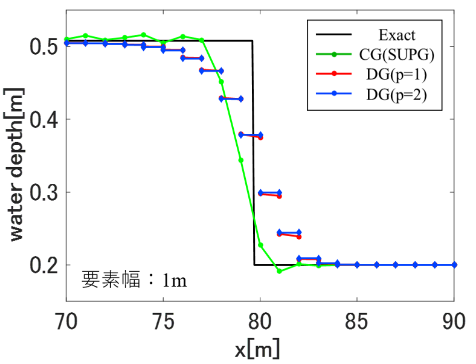
KeyWords： Discontinuous Galerkin 法，数値フラックス，浅水長波流れ，Runge-Kutta 法，Limiter
連絡先： 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 TEL. 03-3817-1808 Email: s.ito@civil.chuo-u.ac.jp



図－２　10s 後の水面形状 (要素幅：1m)



図－３　10s 後の水面形状 (要素幅：0.1m)



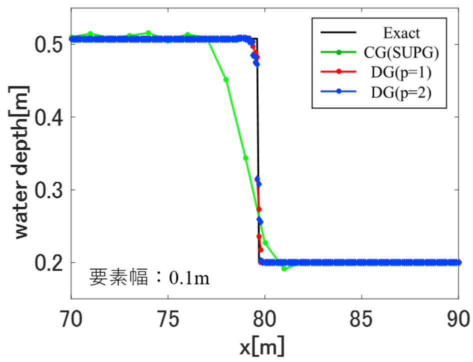
図－４　不連続部での水面形状 (要素幅：1m)

に限界がみられる一方で，DG 法においては精度の向上がみられ，不連続部における急峻な勾配を精度よく表現できていることが確認できる．なお，DG 法の 1 次補間と 2 次補間で精度に差がみられないが，これは Slope Limiter 処理により，勾配を線形に修正していることが要因だと考えられる。**図－７**は DG 法と CG 法の体積保存率を比較したものである．図より，メッシュの解像度にかかわらず DG 法はほぼ完全に体積を保存していることが確認できる．

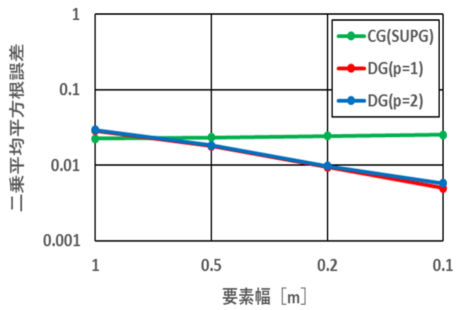
4.　おわりに

本論文では，浅水長波方程式に DG 法を適用し，段波問題において CG 法の解析結果と比較することで DG 法の有効性について検討を行い，以下の結論を得た．

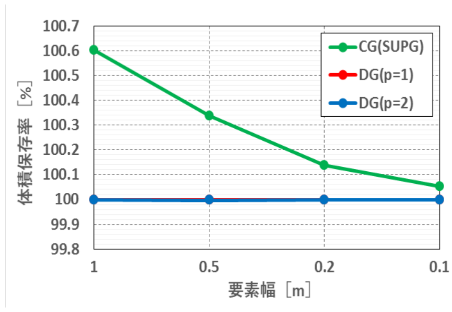
- DG 法は CG 法と比べて，メッシュの細分化に伴い，不連続部において急峻な勾配をより良く表現し，高精度な解が得られることが確認できた．
- DG 法はメッシュの解像度にかかわらず，ほぼ完全に体積を保存することが確認できた．



図－５　不連続部での水面形状 (要素幅：0.1m)



図－６　誤差の比較



図－７　体積保存率の比較

今後の課題としては，高次性を損なわない Limiter 処理手法の導入等が挙げられる．

参考文献

1) D. Schwanenberg, J. Kongeter : A Discontinuous Galerkin Method for the Shallow Water Equations with Source Terms , Discontinuous Galerkin methods(Springer, Heidelberg), pp.419-424, 2000.
2) S. Takase, K. Kashiyama, S. Tanaka, T. E. Tezduyar : Space-time SUPG formulation of the shallow-water equations , *Numerical Methods in Fluids*, Vol.64, Issue.10-12, pp.1379-1394, 2010.
3) M. Dubiner : Spectral Methods on Triangles and Other Domains , *Sci. Comput.* Vol.6, pp.345-390, 1991.
4) B. Cockburn, C.W. Shu : The Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for conservation laws V: multidimensional systems , *Comput. Phys.*, Vol.141, Issue.2, pp.199-224, 1998.
5) A. Burbeau, P. Sagaut, Ch. H. Bruneau : A problem-independent limiter for high-order Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Methods , *Comput. Phys.*, Vol.169, Issue.1, pp.111-150, 2001.