MPS法を用いた異方性材料中の2次元弾性波動解析

○群馬大学大学院理工学府　学生会員　野口豪気
群馬大学大学院理工学府　　正会員　斎藤隆泰

1. はじめに

現在の構造解析分野では, 差分法や有限要素法による数値解析が活発に行われている．これらは, 汎用性が非常に高く, 広範囲の物理現象を精度よく解析することが可能な強力な数値解析手法である．一方で, 差分法や有限要素法は, 破壊問題や大変形問題に対しては, 格子や要素の破綻が生じるなどの脆弱性を持つことが一般に知られている．そこで近年, 粒子法と呼ばれる格子や要素を必要としない数値解析手法が注目を集めている．しかし, 粒子法による構造解析の歴史は浅く, 特に弾性波動解析は, 代表的なものを挙げると, 武川ら[1]や岩本ら[2]による等方性弾性体に対する研究程度に留まっている．そこで, 本研究では, 粒子法の一種であるMPS法[3]を用いて, 異方性材料に対する2次元弾性波動解析を行い, 数値解析結果を示すことで, 本手法の有効性について検討する．

2. MPS法による異方性弾性波動解析の定式化

(1) 重み関数と粒子数密度

MPS法では, 空間に対して重み付けを行うために, 次式に示す重み関数を導入する．

$$w(r) = \begin{cases} \dfrac{r_e}{r} - 1 & \text{for} \quad (0 \leq \mathrm{r} \leq \mathrm{r_e}) \\ 0 & \text{for} \quad (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{1}$$

ここで, r_e は影響半径, r は粒子間距離である．任意の粒子 i に対して式(1)の総和をとると, 次の粒子数密度 n_i が得られる．

$$n_i = \sum_{i \neq j} w(|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i|) \tag{2}$$

ここで, $\boldsymbol{r}_i$ と $\boldsymbol{r}_j$ はそれぞれ粒子 i と粒子 j の位置ベクトルを示す．なお, 初期配置によって得られる各粒子の粒子数密度より全粒子の平均値を算出し, これを初期粒子密度 n^0 とし, 解析の全時間ステップにおいて, この値を使用する．

(2) 粒子間相互作用モデル

前節で説明した重み関数と粒子数密度を用いて, 粒子間相互作用モデルとして, divergence, Laplacianを以下のように定義し, これらをベクトル微分演算子と等価なものとする．

$$\langle \nabla \cdot \boldsymbol{\phi} \rangle_i = \frac{d}{n^0} \sum_{j \neq i} \left[\frac{(\boldsymbol{\phi}_j - \boldsymbol{\phi}_i)}{|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i|} \cdot \frac{(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i|} w(|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i|) \right] \tag{3}$$

$$\langle \nabla^2 \phi \rangle_i = \frac{2d}{n^0} \sum_{j \neq i} \left[\frac{(\phi_j - \phi_i)}{|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i|^2} w(|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i|) \right] \tag{4}$$

また, divergenceにおいて, 2粒子間の中点に変数を配置する場合, 式(3)は次のように表される．

$$\langle \nabla \cdot \boldsymbol{\phi} \rangle_i = \frac{2d}{n^0} \sum_{j \neq i} \left[\frac{\boldsymbol{\phi}_{ij}}{|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i|} \cdot \frac{(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i|} w(|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i|) \right] \tag{5}$$

ここで, d は空間次元数であり, ϕ や $\boldsymbol{\phi}$ はそれぞれ任意のスカラー変数, ベクトル変数である．

(3) MPS法における変位の定式化

粒子間相対変位 $\boldsymbol{u}_{ij}$ は次式で定義される．

$$\boldsymbol{u}_{ij} = (\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{R}_i(\boldsymbol{r}_j^0 - \boldsymbol{r}_i^0) - \boldsymbol{R}_j(\boldsymbol{r}_j^0 - \boldsymbol{r}_i^0)) \tag{6}$$

ここで, $\boldsymbol{r}_i^0$ と $\boldsymbol{r}_j^0$ はそれぞれ粒子 i と粒子 j の初期位置ベクトルを示す．また, $\boldsymbol{R}_i, \boldsymbol{R}_j$ は回転行列であり, それぞれ次のように与えられる．

$$\boldsymbol{R}_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{bmatrix}, \boldsymbol{R}_j = \begin{bmatrix} \cos\theta_j & -\sin\theta_j \\ \sin\theta_j & \cos\theta_j \end{bmatrix} \tag{7}$$

回転行列による初期位置ベクトルの修正によって, せん断応力に起因する剛体回転成分の除去が可能なので, 精度の良いひずみが得られる．なお, θ_i, θ_j の計算方法の詳細については, 文献[3]等を参照されたい．

(4) 支配方程式の離散化

物体の変位ベクトルを $u_i(\boldsymbol{x}, t)$, 応力テンソルを $\sigma_{ij}(\boldsymbol{x}, t)$, ひずみテンソルを $\varepsilon_{kl}(\boldsymbol{x}, t)$ とすると, 時刻 t において弾性体の支配方程式は以下の式で与えられる．

$$\rho \ddot{u}_i(\boldsymbol{x}, t) = \sigma_{ij,j}(\boldsymbol{x}, t) \tag{8}$$

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{x}, t) = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\boldsymbol{x}, t) \tag{9}$$

ここで, ρ は密度, C_{ijkl} は弾性定数, $\dot{()}$ は時間微分, $()_{,i}$ は $\partial/\partial x_i$ である．解析対象が2次元直交異方性弾性体である場合, 式(9)は, 以下のように表現される．

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{13} & 0 \\ C_{31} & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{31} \end{Bmatrix} \tag{10}$$

式(10)を展開し, 整理すると次の式を得る．

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \tag{11}$$

$$C_{13} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} + \varepsilon_{33} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} + \varepsilon_{33} \end{bmatrix} + 2C_{55} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} (C_{11} - C_{13} - 2C_{55})\varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & (C_{33} - C_{13} - 2C_{55})\varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

Key Words: MPS法, 数値解析, 異方性弾性波動問題
〒376-8515　群馬県桐生市天神町 1-5-1・TEL/FAX:0277-30-1610

式 (11) を, 式 (8) に代入し, 変形に回転成分が含まれないことを考慮すると, 次の運動方程式を得る.

$$\begin{cases} \rho \dfrac{\partial v_1}{\partial t} = C_{13}\nabla\cdot((\nabla\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{I}) + 2C_{55}\nabla^2 u_1 \\ \qquad +(C_{11}-C_{13}-2C_{55})\nabla\cdot((\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{I}) \\ \rho \dfrac{\partial v_3}{\partial t} = C_{13}\nabla\cdot((\nabla\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{I}) + 2C_{55}\nabla^2 u_3 \\ \qquad +(C_{33}-C_{13}-2C_{55})\nabla\cdot((\nabla\cdot\boldsymbol{u}_3)\boldsymbol{I}) \end{cases} \tag{12}$$

ここで, u_1, u_3 は, それぞれ変位ベクトルの x_1 方向成分, x_3 方向成分であり, $\boldsymbol{I}$ は単位ベクトルである. 式 (12) のベクトル微分演算子に, 先に述べた粒子間相互作用モデルを適用することで, 式 (12) の左辺である加速度を計算することができる. 得られた加速度を用いれば, 第 $k+1$ ステップにおける粒子速度 $\boldsymbol{v}_i^{k+1}$ と粒子位置 $\boldsymbol{r}_i^{k+1}$ は, それぞれ次のように更新することができる.

$$\boldsymbol{v}_i^{k+1} = \boldsymbol{v}_i^k + \Delta t\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial t}\right) \tag{13}$$

$$\boldsymbol{r}_i^{k+1} = \boldsymbol{r}_i^k + \Delta t \boldsymbol{v}_i^{k+1} \tag{14}$$

但し, Δt は時間増分である.

3. 数値解析例

以下, 数値解析例を示す. 解析モデルの形状寸法は, 図 1(a) のような長方形領域 50mm×100mm とした. 入射波は, 解析モデルの上面中央に次のように与えた.

$$u^{\mathrm{in}} = u_0(1-\cos 2\pi\alpha)$$

$$\alpha = \begin{cases} \dfrac{n\Delta t}{T} & \text{for} \quad (0 \le \alpha \le 1) \\ 0 & \text{for} \quad (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{15}$$

ここで, n はステップ数, u_0 は振幅, T は周期である. 但し, 実際の解析では, $u_0 = 0.50$, $T = 5.0\times10^{-7}$(s) としている.

(1) 精度の確認

まず, 本手法の精度を確認するために, 本手法により得られた数値解と FEM 及び EFIT により得られた数値解との比較検討を行った. 材料は等方性鋼材とし, 密度は ρ=7850(kg/m^3), 弾性定数はそれぞれ C_{11}=282.7, C_{13}=C_{31}=121.1, C_{33}=282.7, C_{55}=80.8(単位は GPa) で与えた. 解析結果を図 2 に示す. 図 2 は, 図 1 (a) の A 点における変位の絶対値 $|\boldsymbol{u}|$ の時間変化を示している. 本手法による数値解は, FEM 及び EFIT による数値解と概ね一致しており, 解析結果は妥当であることが示された.

(2) 異方性材料中の 2 次元弾性波動解析

次に, 本手法を用いた異方性材料中の 2 次元弾性波動解析を示す. 材料は直交異方性を示す一方向炭素繊維強化プラスチックとし, 密度は ρ=1600(kg/m^3), 弾性定数はそれぞれ C_{11}=125.5, C_{13}=C_{31}=8.0, C_{33}=15.1, C_{55}=6.5 で与えた. 参考のため, 本解析で用いた一方向炭素繊維強化プラスチックの群速度曲線を図 1 (b) に示しておく. 図 3 (a)-(d) に, それぞれステップ数 $n = 500, 1000, 1500, 2000$ における全変位場の絶対値 $|\boldsymbol{u}|$ を示す. 図 3(a)-(d) より, qP 波は横長に伝播し, qS1 波は縦長に伝播する様子が確認できる. この傾向は, 図 1 (b) の群速度曲線と一致する. また, 図 3 (c)-(d) より, 境界からの反射波の伝播が見て取れる. 以上のことから, 本手法は定性的に一方向炭素繊維強化プラスチックにおける波動伝播現象を再現出来たと言える.

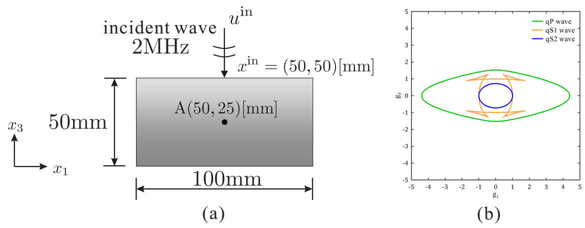

図 1 解析モデルと一方向炭素繊維強化プラスチックの群速度曲線 (a) 解析モデル (b) 一方向炭素繊維強化プラスチックの群速度曲線

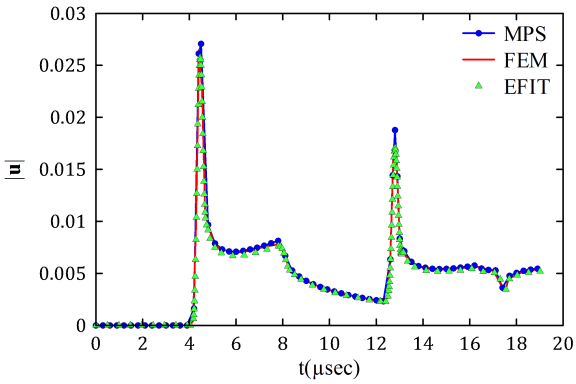

図 2 MPS,FEM,EFIT による変位の絶対値 $|\boldsymbol{u}|$

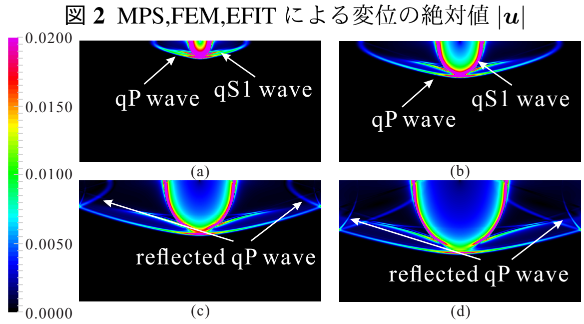

図 3 全変位場のスナップショット (a) $n = 500$ (b) $n = 1000$ (c) $n = 1500$ (d) $n = 2000$

4. まとめ

MPS 法による 2 次元異方性弾性波動解析の定式化を行った. 導出した定式化に等方性鋼材の弾性定数を用いた解析を行い, FEM 及び EFIT 解析による解析結果とそれぞれ比較することによって, 本手法の妥当性を示した. また, 異方性材料に対する弾性波動解析を行い, 結果の妥当性を示した. 今後は, 3 次元問題への拡張, 高速化手法の適用に取り組む予定である.

参考文献

1) 武川順一・山田泰広・三ケ田均・芦田讓 : MPS 法による弾性波動伝播現象と破壊現象の数値シミュレーション, 物理探査,Vol.61,No.2,pp.169-179,(2008).
2) 岩本哲也・小野祐輔 : 弾性波伝播問題に対する粒子法の適用性, 応用力学論文集,12,pp.611-622,(2009).
3) 越塚誠一 : 粒子法 計算力学レクチャーシリーズ 5, 丸善株式会社,(2005).