

ISPH 法における圧力の計算精度の向上を目的とした 自由表面の取り扱い

京都大学 学生会員 原田 峻吾
京都大学 正会員 ○西藤 潤

1 序論

SPH(Smoothed Particle Hydrodynamics) 法¹⁾²⁾は粒子法と呼ばれる計算手法の一つで、近年では流体の数値計算にも利用されている。SPH 法を拡張した手法に、非圧縮性 (incompressible) 流体を対象とした ISPH 法³⁾がある。SPH 法を用いた計算では方程式を陽的に解くが、ISPH 法は圧力計算のときに圧力ポアソン方程式を陰的に解く。その際に境界条件が必要となるので、ISPH 法では自由表面の扱いが重要になる。

自由表面の取り扱い手法として、1. 自由表面の判定基準を設ける方法 (以下では従来法と呼ぶ) と 2. ゴースト粒子を設ける方法がある。1 の手法は閾値を超えると圧力の値を 0 とするため不連続な処理となり、2 の手法は計算負荷が増大するという欠点がある。本研究では計算負荷を増加させず、なおかつ連続的な処理を行うことを目的として新しい自由表面処理方法を提案する。

2 ISPH 法を用いた流体解析

流体は Navier-Stokes 方程式と連続式に従う。

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

特に非圧縮性流体を扱う場合、連続式は以下のように書ける。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3)$$

圧力ポアソン方程式は

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) = \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^*}{\Delta t} \quad (4)$$

とし、左辺を離散化して

$$\left\langle \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) \right\rangle_i = \frac{2}{\rho_0^2} \sum m_j \frac{p_{ij}}{r_{ij}^2} \mathbf{r}_{ij} \cdot \nabla W_{ij} \quad (5)$$

を用いた。

3 自由表面の取り扱い

差分法では、一次元ラプラシアンは以下のように離散化される。

$$-\frac{d^2 p}{dx^2} \Big|_{i=1} = \frac{-p_0 + 2p_1 - p_2}{\Delta x^2} \quad (6)$$

p_0 が与えられる点を自由表面とし、行列表現にする。

$$\frac{1}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (7)$$

対角項の値は自由表面における行とそれ以外の行で同じ値となっている。このことを ISPH 法に適用し、対角項の値が同じになるように行列を修正する。

簡単のため p_i の係数を以下のように a_{ij} 、その和を d_i と置くと、圧力のラプラシアンは以下になる。

$$d_i = \sum_j a_{ij} = \sum_j \frac{2}{\rho_0^2} \frac{m_j \mathbf{r}_{ij} \cdot \nabla W_{ij}}{r_{ij}^2} \quad (8)$$

$$\left\langle \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) \right\rangle_i = d_i p_i - \sum_j a_{ij} p_j \quad (9)$$

p_i の係数である d_i が対角項に相当する。粒子 i の周囲に粒子が均等に配置しているとすると d_i はだいたい一定の値を取る。近傍粒子の数が少ないと d_i の値、すなわち対角成分の値は小さくなるので、粒子 i の周囲に $p = 0$ となる粒子が存在すると仮定し、 d_i の値が他の粒子の d_i と同じ値を取ると考える。

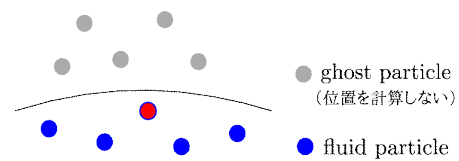


図-1 物理的意味

キーワード ISPH 法, 自由表面, 計算精度向上

連絡先 〒615-8540 京都府京都市西京区京都大学桂 C1-586

4 解析結果

4.1 三次元静水圧問題

提案手法の妥当性を検証するため、静水圧の三次元解析を行った。初期配置として、壁粒子、ダミー粒子を直方体の箱状に配置し、その中に流体粒子を乱した状態で配置した。この状態における底面の壁粒子の圧力を従来法、提案手法で比較する。従来法とは粒子の密度がある密度を下回った時に、圧力の値を 0 にする方法である。図-2 は従来法、提案手法と理論値を比較したグラフで縦軸が圧力、横軸が時間である。

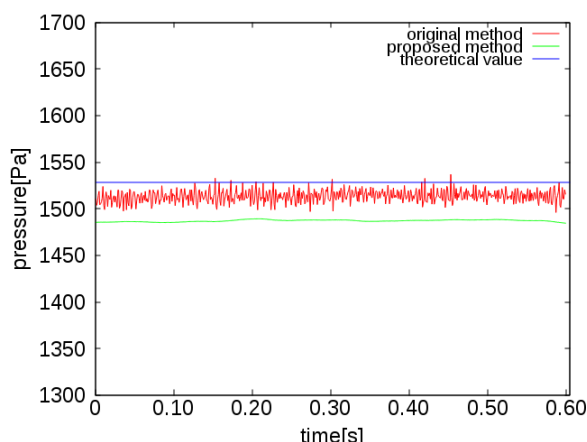


図-2 底面の圧力値

4.2 三次元ダムブレイク問題

次に、より実践的な流体解析をするためダムブレイク問題の三次元解析も行った。初期配置として、壁粒子、ダミー粒子を直方体の箱状に配置し、その角に流体粒子を角柱状に配置した。図-3 は流体のダムブレイクの様子であり、図-4、5 はそれぞれ流体中の圧力分布の拡大図である。

5 結論

本研究では、ISPH 法における自由表面の扱いを変えることで圧力値の計算精度がどれほど変化するかと比較、検証を行った。その結果、以下の成果を得た。

- 従来法では底面の圧力値の変動が大きいですが、提案手法では安定している。

- 従来法では流体内部で不連続な $p = 0$ が出現しているが、提案手法では流体中でも圧力値は適当な値をとっているため、従来法より精度の高い計算ができている。

今後の課題として、MPS 法への適用や、密度の異なる流体の流れである混相流の解析、構造との連成解析などへの応用が挙げられる。

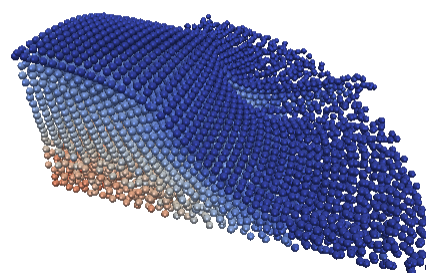


図-3 ダムブレイク問題の圧力解析

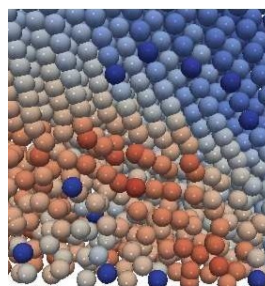


図-4 従来法



図-5 提案手法

参考文献

- 1) Monaghan, J. J. : Smoothed particle hydrodynamics, *Annual review of astronomy and astrophysics*, Vol. 30, No. 1, pp. 543–574, 1992.
- 2) Lucy, L. B. : A numerical approach to the testing of the fission hypothesis, *The astronomical journal*, Vol. 82, pp. 1013–1024, 1977.
- 3) Shao, S. and Lo, E. Y. : Incompressible SPH method for simulating Newtonian and non-Newtonian flows with a free surface, *Advances in water resources*, Vol. 26, No. 7, pp. 787–800, 2003.