平均法による移動量計算の基礎理論と改良

東海旅客鉄道株式会社　正員　永沼泰州

1. はじめに

保線実務では電子計算機が普及する遥か以前から，「累計法」や「平均法」と呼ばれる方法を用いて，10 m 弦測定値から移動量（帯域制限された軌道形状，以下「原波形」）が計算されていた[1)]．前者の累計法は主に数表を用いた手計算で行われ，簡便だが距離に比例して測定誤差が累積するという欠点がある．後者の平均法（およびこれを歯車機構で機械的に演算する曲線整正器）は繰返し演算で移動量を求める方法で，計算結果に個人差が生じるものの，繰返し回数によって誤差の累積を制御できるという利点を持つ．本稿はまず，この平均法が線型連立方程式の数値解法である「反復法」そのものであることを示す．次に，数多く提案されている反復法の改良アイデアをもとに，平均法を改良した結果について述べる．

2. 平均法

平均法は，線路の移動によって残留狂いが小さくなるよう，繰り返し原波形を修正していく計算法である．算出例を図-1 に示す．まず測点 6 の正矢量が −13 mm なので，この位置の原波形を −10 mm と仮定して残留狂いを計算する．すると，最も大きな残留狂いは測点 10 の −10 mm になるので，この位置に原波形 −10 mm を追加して再度残留狂いを計算する．同様の操作を繰り返せば，この例では 4 回目で正しい原波形が得られる．

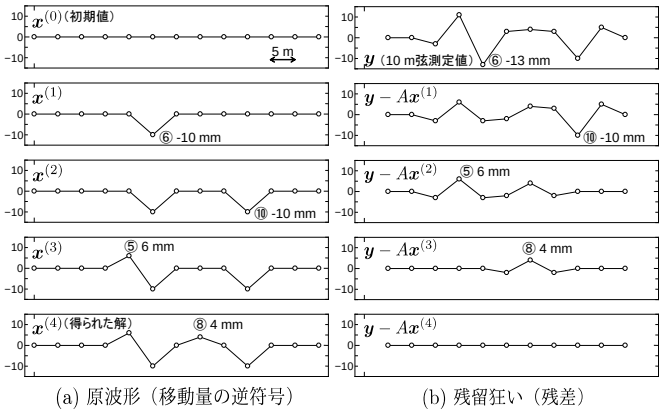
3. 反復法

線形連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ を解くための反復法は，適当な初期値 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ から出発して，式 (1) を所望の精度が得られるまで繰り返す数値計算法である．

$$\boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{x}^{(k-1)} + R^{(k)} \left(\boldsymbol{y} - A\boldsymbol{x}^{(k-1)} \right), \quad k \geq 1 \qquad (1)$$

式中の $\boldsymbol{y} - A\boldsymbol{x}^{(k-1)}$ は，$\boldsymbol{x}^{(k-1)}$ が解に近ければ小さくなることが期待される「残差」で，$R^{(k)}$ は理想的には A^{-1} である．反復法ではこの行列 R の選定がポイントとなる．

軌道狂い原波形の復元も $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ を解く問題であり，前章の平均法の計算例では，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{13}$ が原波形



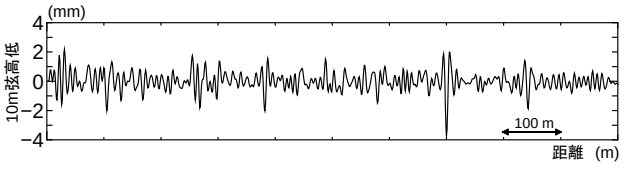
(a) 原波形（移動量の逆符号）　(b) 残留狂い（残差）

図–1 平均法による移動量算出

ベクトル，$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{11}$ は 10 m 弦正矢ベクトル，そして $A \in \mathbb{R}^{11\times13}$ は正矢法の係数である-0.5，1.0，-0.5 を各行の要素に持つ検測行列である．平均法によって反復計算される残留狂いは $\boldsymbol{y} - A\boldsymbol{x}^{(k-1)}$ であり，この残留狂いを基に新たな追加原波形 $R^{(k)}\left(\boldsymbol{y} - A\boldsymbol{x}^{(k-1)}\right)$ が決定されるのであるから，平均法の基礎理論は反復法そのものであると言える．なお，平均法における $R^{(k)}$ は，追加する原波形の位置に対応する要素 $r_{i,j}$ のみが値を持つ行列で，この値は計算者が残差を見ながら経験的に決定する．前章の例では，$R^{(k)} \in \mathbb{R}^{13\times11}$ の各ステップ毎の要素は，$r^{(1)}_{6,5} = 10/13$，$r^{(2)}_{10,9} = 1.0$，$r^{(3)}_{5,4} = 1.0$，$r^{(4)}_{8,7} = 1.0$，である．

4. 原波形復元のための反復法の改良

反復法は，行列 R の工夫などにより数多くの方法が提案されている．例えば行列 A の対角行列 D を用いて $R = D^{-1}$ とした「Jacobi 法」，行列 A の下三角行列 L も用いて $R = (L + D)^{-1}$ とした「Gauss-Seidel 法」などである．本章では，保線特有のアイデアを用いた改良反復法を提案し，原波形計算を行ってその効果を確認する．計算に用いた 10 m 弦高低狂い（サンプリング間隔：1.0 m）を図-2 に示す．



図–2 計算に用いた 10 m 弦高低狂い

キーワード: 平均法，移動量，反復法，軌道狂い原波形，Landweber 法
連絡先: 〒 485-08014　愛知県小牧市大山 1545 番 33　東海旅客鉄道 (株) 技術開発部　Tel 0568-47-5381/ Fax 0568-47-5362

(1) Landweber 法

まず，平均法において個人差が生じる要因である R を機械的に決定したい．10 m 弦検測行列 A は正方行列でない（劣決定）ので，Jacobi 法や Gauss-Seidel 法など，正方行列を前提とした解法は（厳密には）使えない．そこで本節では $R = \omega A^T$ とする「Landweber 法」を適用する[2]．ω は解に近づく早さを制御する係数で,「緩和因子」と呼ばれる．

$$\boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{x}^{(k-1)} + \omega A^T \left(\boldsymbol{y} - A\boldsymbol{x}^{(k-1)} \right) \qquad (2)$$

ω を 0.5，初期値 $\boldsymbol{x}^{(0)} = \boldsymbol{0}$ として，反復回数 k =100, 1100，5000 とした場合の計算結果を図-3 に示す．図中，逆フィルタ[3]を用いて波長 100 m まで復元した結果を点線で示す．Landweber 法では，反復回数 k によって復元帯域が変化することがわかる．今回の条件では $k = 1100$ で復元逆フィルタの結果と良く一致した．

(2) 長波長成分を考慮した演算高速化

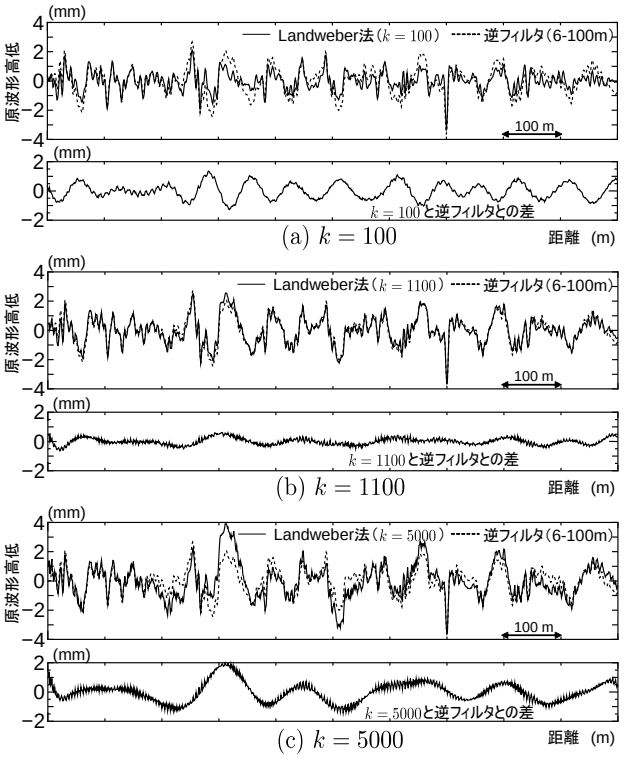
前述の Landweber 法では多くの反復回数を必要とするが，これは追加原波形の決定に波長 10 m 付近の情報（10 m 弦の残差）のみを使用しているからである．そこで，長波長成分の残差情報を利用すれば反復回数を減少できると考えられる．以上のアイデアに基づき，Landweber 法に以下の改良を加えた．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^{(k)} &= \boldsymbol{x}^{(k-1)} + \omega A^T \left(B^{(k-1)}\boldsymbol{y} - B^{(k-1)} A\boldsymbol{x}^{(k-1)} \right) \\ &= \boldsymbol{x}^{(k-1)} + \omega B^{(k-1)} A^T \left(\boldsymbol{y} - A\boldsymbol{x}^{(k-1)} \right) \end{aligned} \qquad (3)$$

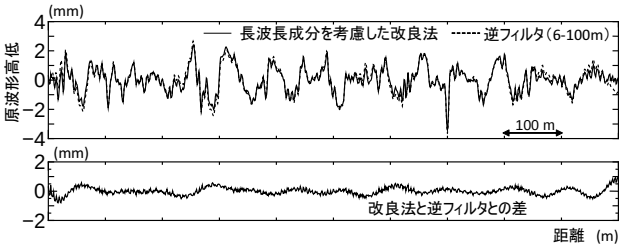
式 (3) 中の行列 B は，10 m 弦を長波長狂いに変換するための倍長演算行列であり，この方法は，$R^{(k-1)} = \omega B^{(k-1)} A^T$ とおいた改良反復法とみなすことができる．ただし，例えば 40 m 弦の残差情報のみを使用すると波長 20 m の情報が欠落してしまうので，反復途中で弦長を切り替える．ω を 0.5，$\boldsymbol{x}^{(0)} = \boldsymbol{0}$ として，反復 25 回毎に倍長演算行列 B を，40 m 弦 →30 m 弦 →20 m 弦 →10 m 弦と変更した場合の復元結果を図-4 に示す．反復回数は合計 100 回であるが，波長 100 m までの復元逆フィルタの結果と良く一致し，提案した新しい反復法の高速演算効果が確認できた．

5. おわりに

本稿では測定データとして 1.0 m サンプリングの 10 m 弦正矢を用いたが，使用するデータに特段の制約は無く，2.5 m 弦正矢データや 25 cm サンプリングの偏心矢データでも構わない．逆フィルタによる方法では，



図–3 Landweber 法による原波形復元



図–4 長波長成分を考慮した改良反復法

データの始終端に所定の精度を満たさない過渡応答が生じるが，反復法はこれをかなり短くできる可能性がある．また，現在においても数多くの反復法が提案され続けており，これら新手法の適用によって更なる演算の高速化や精度向上が期待できる．中でも Kalman フィルタの手続きを利用した反復法は演算が極めて高速で，わずか数回の反復計算で解が得られる[4]．今後は大型保線機械や簡易検測装置等で測定した短い区間のデータの原波形計算に本成果を適用し，実用化したい．

参考文献

1) 金子慶尚：正矢と曲線の整正，カネコ計測工業株式会社，1971 年.
2) 永沼泰州，吉村彰芳：正則化手法を用いた軌道狂い原波形の復元，鉄道力学シンポジウム論文集，第 13 号，2009 年.
3) 吉村彰芳: 軌道狂い原波形の復元に関する理論的基礎の確立とその応用，鉄道技術研究報告，第 1336 号，1987 年 2 月.
4) 永沼泰州，吉村彰芳：状態空間モデルを用いた軌道狂い原波形の復元，第 17 回鉄道技術連合シンポジウム，2010 年 12 月.